# EIN „MERKWÜRDIGES“ SPEKTRUM FÜR NICHTLINEARE OPERATOREN

J. Appell, Würzburg

(Eingegangen am November 24, 1998)

*Professor Alois Kufner zu seinem 65. Geburtstag gewidmet*

*Abstract.* We define a spectrum for Lipschitz continuous nonlinear operators in Banach spaces by means of a certain kind of "pseudo-adjoint" and study some of its properties.

*Keywords*: nonlinear operator, Lipschitz continuity, pseudo-adjoint operator, resolvent set, spectrum, eigenvalue

*MSC 2000*: 47H12, 47H09, 47H17, 47A10, 47A25, 47C99

*Acknowledgement.* The author is indebted to M. Väth and P. P. Zabrejko for several useful comments on a previous version of this paper.

Angesichts der enormen Bedeutung der Spektraltheorie linearer Operatoren in der Mathematik, Mechanik und Physik ist es nicht verwunderlich, dass es schon mehrere Versuche gab, auch eine Spektraltheorie nichtlinearer Operatoren einzuführen. Natürlich sind solche Theorien nicht völlig willkürlich: Es ist klar, dass, wann immer man ein Spektrum für nichtlineare Operatoren einzuführen versucht, vernünftigerweise einige "Minimalforderungen" an dieses Spektrum erfüllt sein sollten. So sollte es im linearen Fall mit dem klassischen Spektrum übereinstimmen und möglichst viele von dessen analytischen Eigenschaften haben (z.B. kompakt und nichtleer sein). Ausserdem sollte ein solches Spektrum nichttriviale Anwendungen haben, d.h. zur Lösung nichtlinearer Probleme führen, die bisher mit anderen Methoden nicht lösbar waren.

Leider trifft man bei Einführung eines nichtlinearen Spektrums auf verschiedene unangenehme Phänomene. Im Unterschied zum linearen Fall enthält jedes der bisher bekannten Spektren eines nichtlinearen Operators nur sehr wenig Information über diesen. Ausserdem hat keines der bisher definierten nichtlinearen Spektren alle wichtigen Eigenschaften des linearen Spektrums. Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir einige der bekannten Spektren im Hinblick auf die Eigenschaften, nichtleer, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt zu sein sowie die Eigenwerte des betrachteten Operators zu enthalten. Was die letzte Eigenschaft betrifft, so enthält nur das von Furi, Martelli und Vignoli definierte Spektrum die Eigenwerte nicht, wie zuerst von Edmunds und Webb [5] bemerkt wurde. Dies liegt daran, dass dieses Spektrum—grob gesprochen—nur "asymptotische Informationen" über den betrachteten Operator enthält, während die Eigenwerte natürlich eine "globale Charakteristik" eines Operators sind.

In der folgenden Tabelle verweist [11] auf das von Neuberger 1969 eingeführte Spektrum für $C^1$-Operatoren, [8] auf das von Kachurovskij 1969 eingeführte Spektrum für Lipschitz-stetige Operatoren, [12] auf das von Rhodius 1977 eingeführte Spektrum für stetige Operatoren, [2] auf das von Dörfner und dem Autor 1997 eingeführte Spektrum für linear-beschränkte Operatoren, [7] auf das von Furi, Martelli und Vignoli 1978 eingeführte Spektrum für gewisse quasi-beschränkte Operatoren, und schliesslich [6] auf das von Feng 1997 eingeführte Spektrum für sogenannte $k$-epi-Operatoren.

| Spektrum | $\neq \emptyset$ | *abgeschlossen* | *beschränkt* | *kompakt* | $\supseteq$ *Eigenwerte* |
|---|---|---|---|---|---|
| [11] | ja | nein | nein | nein | ja |
| [8] | nein | ja | ja | ja | ja |
| [12] | nein | nein | nein | nein | ja |
| [2] | nein | nein | nein | nein | ja |
| [7] | nein | ja | nein | nein | nein |
| [6] | nein | ja | nein | nein | ja |

Die Beweise sämtlicher mit "ja" bezeichneten Eigenschaften sowie Gegenbeispiele für jedes "nein" kann man im Übersichtsartikel [1] finden.

In dieser Arbeit führen wir ein neues Spektrum für nichtlineare Operatoren ein, welches auf recht "merkwürdige" Art und Weise definiert wird, aber interessante Eigenschaften zu haben scheint. Im Gegensatz zu allen oben erwähnten Spektren ist es aufgrund seiner Konstruktion stets kompakt und nichtleer. Andererseits hat es leider zwei schwerwiegende Nachteile: es ist es schon für einfache Operatoren nicht leicht zu berechnen, und es stimmt im linearen Fall nicht mit dem üblichen Spektrum überein.

Seien $X$ und $Y$ Banachräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mit $\mathfrak{Lip}_0(X, Y)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller Lipschitz-stetigen Operatoren $F\colon\ X \to Y$ mit $F(0) = 0$. Mit der Norm

$$[F]_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\|x - y\|}$$

versehen ist dies ein Banachraum, der den Raum $\mathfrak{L}(X, Y)$ der beschränkten linearen Operatoren von $X$ nach $Y$ als abgeschlossenen Unterraum enthält. Insbesondere setzen wir $\mathfrak{Lip}_0(X, \mathbb{K}) =: X^\#$; dieser Raum enthält also den üblichen Dualraum $X^*$ als abgeschlossenen Unterraum.

Zu gegebenem $F \in \mathfrak{Lip}_0(X, Y)$ definieren wir die *Pseudo-Adjungierte* $F^\# \colon Y^\# \to X^\#$ durch

$$F^\#(g)(x) := g(F(x)) \qquad (g \in Y^\#,\ x \in X). \tag{1}$$

Dies ist natürlich der Definition der üblichen Adjungierten für lineare Operatoren nachempfunden, denn für lineares $F$ haben wir $F^\#|_{Y^*} = F^*$, d.h. die Einschränkung der Pseudo-Adjungierten auf den Dualraum ist die Adjungierte. Eine ähnliche Definition der Adjungierten in sogenannten schwachen metrischen Räumen wurde kürzlich von Trenogin [14] gegeben.

Wir bemerken, dass es in der Literatur schon mehrere Definitionen adjungierter Operatoren zu nichtlinearen Operatoren gibt. Ausser der in [14] enthaltenen sind alle diese Definitionen allerdings wesentlich verschieden von unserer. Eine recht natürliche Definition stammt von Nashed ([10], siehe auch [16]): Ist $F$ ein $C^1$-Operator in einem Hilbertraum $H$ mit $F(0) = 0$, so heisst $F^* \colon H \to H$ Adjungierte zu $F$, falls $[F^*]'(x) = [F'(x)]^*$ gilt, wobei der Stern auf der rechten Seite die übliche Adjungiertenbildung linearer Operatoren bezeichne. Eine solche Adjungierte $F^*$ existiert genau dann, wenn $F'(x) - [F'(x)]^*$ unabhängig von $x$ ist; in diesem Fall gilt die Darstellung

$$F^*(x) = \int_0^1 [F'(tx)]^* x \, \mathrm{d}t.$$

Insbesondere ist $F$ genau dann selbstadjungiert (d.h. es gilt $F^* = F$), wenn $F$ ein Potentialoperator ist; dies stellt einen interessanten Zusammenhang zwischen der Variationsrechnung und Adjungiertenbildung nichtlinearer Operatoren her.

In ähnlicher Weise definieren Cacuci, Perez und Protopopescu [3]—offenbar in Unkenntnis der Arbeiten [10] und [16]—für einen Gâteaux-differenzierbaren nichtlinearen Operator $F$ in einem Hilbertraum $H$ eine Adjungierte $F^+ \colon H \to \mathfrak{L}(H)$ durch

$$F^+(u) := \int_0^1 N'(tu)^* \, \mathrm{d}t.$$

Das Paar $(F, F^+)$ erfüllt dann die Dualitätsrelation

$$\langle F(u), v \rangle = \langle u, F^+(u)v \rangle. \tag{2}$$

Nachteile dieser Konstruktion sind natürlich die Differenzierbarkeitsforderung an $F$ sowie die Tatsache, dass die rechte Seite der Dualität (2) parameterabhängig ist.

Speziell ordnet Shutjaev [13] einem stetigen Operator $F\colon\ L_2(\Omega)\times[0,1]\to W_2^{-1}(\Omega)$ eine Adjungierte $F^*\colon\ W_2^1(\Omega)\times[0,1]\to L_2(\Omega)$ über die Dualität

$$\langle F(u,\varepsilon)v,w\rangle=\langle v,F^*(u,\varepsilon)w\rangle\quad(0\leqslant\varepsilon\leqslant 1) \tag{3}$$

zu. Diese Definition ist im Hinblick auf Anwendungen auf quasilineare hyperbolische Gleichungen erster Ordnung modelliert, hat aber natürlich auch den Nachteil, parameterabhängig zu sein. Eine weitere Definition, die interessante Anwendungen auf nichtlineare Halbgruppen mit akkretiven Generatoren hat, stammt von Caselles [4].

Bevor wir zur Definition eines Spektrums für $F\in\mathfrak{Lip}_0(X,X)$ kommen, diskutieren wir einige einfache Eigenschaften der Pseudo-Adjungierten (1). Wir beginnen mit dem folgenden trivialen

**Lemma 1.** *Die Pseudo-Adjungierte $F^\#$ von $F\in\mathfrak{Lip}_0(X,Y)$ ist linear und beschränkt mit $\|F^\#\|=[F]_{\mathrm{Lip}}$.*

B e w e i s. Für $g\in Y^\#$ haben wir

$$[F^\#(g)]_{\mathrm{Lip}}=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|g(F(x))|\leqslant[g]_{\mathrm{Lip}}[F]_{\mathrm{Lip}},$$

woraus die Abschätzung $\|F^\#\|\leqslant[F]_{\mathrm{Lip}}$ folgt. Die umgekehrte Abschätzung ist etwas weniger trivial. Zu $\varepsilon>0$ wählen wir zwei Punkte $x$ und $z$ in $X$ mit

$$\|F(x)-F(y)\|\geqslant(1-\varepsilon)[F]_{\mathrm{Lip}}\|x-y\|.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir wiederum zu diesen Punkten ein Funktional $l\in Y^*$ finden derart, dass $\|l\|=1$ und $l(F(x)-F(y))=\|F(x)-F(y)\|$ ist. Wir erhalten dann wegen der Linearität von $l$

$$\|F^\#(l)(x)-F^\#(l)(Y)\|=l(F(x)-F(y))\geqslant(1-\varepsilon)[F]_{\mathrm{Lip}}\|x-y\|,$$

woraus die Abschätzung $\|F^\#\|\geqslant[F]_{\mathrm{Lip}}$ folgt. □

Nach Konstruktion ist $F^\#$ also stets linear, auch wenn $F$ selbst nichtlinear ist. Hierfür müssen wir allerdings einen hohen Preis zahlen: die Räume $X^\#$ und $Y^\#$ sind im allgemeinen erheblich grösser als die Räume $X$ und $Y$ oder die Dualräume $X^*$ und $Y^*$. Während man die Dualräume $X^*$ vieler klassischer Banachräume $X$ sehr gut beschreiben kann, scheint dies für die Räume $X^\#$ nicht möglich zu sein. Wieviel grösser der Raum $X^\#$ als der Raum $X^*$ ist, kann man auch an folgendem sehen: definieren wir die Schwach$^\#$-Konvergenz einer Folge $(x_n)_n$ in $X$ gegen ein $x_0\in X$ dadurch, dass $f(x_n)\to f(x_0)$ $(n\to\infty)$ für alle $f\in X^\#$ gelten soll, so ist dies—im

Gegensatz zur üblichen schwachen Konvergenz—äquivalent zur starken Konvergenz $x_n \to x_0$! In der Tat, die spezielle Wahl $f(x) := \|x - x_0\| - \|x_0\|$ ergibt nämlich $\|x_n - x_0\| = f(x_n) - f(x_0) \to 0$.

Das folgende Lemma illustriert, ähnlich wie im linearen Fall, das "Wechselspiel" der Abbildungseigenschaften von $F$ und $F^\#$:

**Lemma 2.** *Ist $F^\#\colon Y^\# \to X^\#$ injektiv, so hat $F\colon X \to Y$ einen dichten Wertebereich $F(X) \subseteq Y$. Ist $F^\#\colon Y^\# \to X^\#$ surjektiv, so ist $F\colon X \to Y$ injektiv mit Lipschitz-stetiger Inverser auf $F(X)$.*

Beweis. Sei $F^\#$ injektiv. Wir nehmen an, dass der Wertebereich $F(X)$ von $F$ nicht dicht in $Y$ ist. Dann finden wir ein $y_0 \in Y$ und ein $r > 0$ derart, dass $\|y - y_0\| \geqslant r$ für alle $y \in \overline{F(X)}$ gilt. Die durch $g(y) := \max\{0, r - \|y - y_0\|\}$ definierte Funktion $g$ gehört dann zu $Y^\#$ (mit $[g]_{\mathrm{Lip}} = 1$) und verschwindet auf $\overline{F(X)}$, ist aber nicht identisch Null auf $Y$. Da $F^\#$ nach Voraussetzung injektiv ist, kann auch die Funktion $F^\#(g) \in X^\#$ nicht identisch Null auf $X$ sein. Andererseits haben wir nach Konstruktion $F^\#(g)(x) = g(F(x)) \equiv 0$, ein Widerspruch.

Sei jetzt $F^\#$ surjektiv, d.h. zu jedem $f \in X^\#$ finden wir ein $g \in Y^\#$ mit $F^\#(g) = f$; nach dem Satz von der offenen Abbildung gilt dann auch noch $\|g\| \leqslant c\|f\|$ für ein $c > 0$ unabhängig von $f$. Für festes $x, y \in X$ gibt es wiederum nach dem Satz von Hahn-Banach ein $l \in X^* \subseteq X^\#$ mit $\|l\| = 1$ und $|l(x - y)| = \|x - y\|$. Für $g \in Y^\#$ mit $l = F^\#(g)$ haben wir dann

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= |l(x - y)| = |l(x) - l(y)| = |g(F(x)) - g(F(y))| \\ &\leqslant [g]_{\mathrm{Lip}}\|F(x) - F(y)\| \leqslant c\|F(x) - F(y)\|.\end{aligned}$$

Da $c$ auch nicht von $x$ und $y$ abhängt, ist die Umkehrbarkeit von $F$ mit $[F^{-1}]_{\mathrm{Lip}} \leqslant c$ bewiesen. $\square$

Das bekannte lineare Beispiel $X = Y = l_2$ und $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots)$ zeigt, dass man in Lemma 2 nicht die Surjektivität von $F$ erwarten kann. In der Tat ist $F^\# = F^* = F$ hier injektiv in $X^* = X$, aber $F(l_2)$ kann nicht den ganzen Raum $l_2$ umfassen, da $F^{-1}$ dann nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen beschränkt wäre.

Wir nennen einen bijektiven Operator $F\colon X \to Y$ einen *Lipeomorphismus*, falls sowohl $F \in \mathfrak{Lip}_0(X, Y)$ als auch $F^{-1} \in \mathfrak{Lip}_0(Y, X)$ gilt.

**Satz 1.** *$F\colon X \to Y$ ist genau dann ein Lipeomorphismus, wenn $F^\#\colon Y^\# \to X^\#$ ein linearer Isomorphismus ist; in diesem Fall haben wir $(F^\#)^{-1} = (F^{-1})^\#$.*

Beweis. Ist $F$ ein Lipeomorphismus, so hat die lineare Gleichung $F^\#(g) = f$ für jedes $f \in X^\#$ eine eindeutige Lösung $g \in Y^\#$, nämlich $g(y) = f(F^{-1}(y))$. Ist umgekehrt $F^\#$ bijektiv, so ist $F$ nach Lemma 2 ein Lipeomorphismus von $X$ auf $F(X)$. Aus der Vollständigkeit von $X$ folgt die von $F(X)$; wegen der Dichtheit von $F(X)$ in $Y$ ist $F$ also surjektiv.

Die Gleichheit $(F^\#)^{-1} = (F^{-1})^\#$ folgt aus der Tatsache, dass stets $(GF)^\# = F^\# G^\#$ sowie $I^\# = I$ ist. $\square$

Satz 1 legt nahe, wie man nun ein Spektrum für einen Operator $F \in \mathfrak{Lip}_0(X, X)$ definieren kann, nämlich mittels der Formel

$$\Sigma(F) := \sigma(F^\#) = \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - F^\# \text{ ist nicht bijektiv}\}, \tag{4}$$

d.h. rechts steht das übliche Spektrum des linearen Operators $F^\#$ in $X^\#$.

Wir bemerken, dass ein naheliegendes Spektrum für Operatoren $F \in \mathfrak{Lip}_0(X, X)$ schon von Kachurovskij [8] (siehe auch [9, 15]) eingeführt wurde, nämlich

$$\sigma_K(F) := \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - F \text{ ist kein Lipeomorphismus}\}. \tag{5}$$

Es ist klar, dass (5) im linearen Fall genau das übliche Spektrum ergibt. Weiter haben Maddox und Wickstead [9] bewiesen, dass $\sigma_K(F)$ stets kompakt und—analog zum linearen Fall—in der Kreisscheibe um 0 mit Radius $[F]_{\mathrm{Lip}}$ enthalten ist. Ferner wurde in [9] gezeigt, dass im Fall dim $X = 1$ (also $X = \mathbb{C}$) stets $\sigma_K(F) \neq \emptyset$ gilt, während die Nichttrivialität des Spektrums im Fall dim $X \geqslant 2$ in [9] als offene Frage formuliert wurde. Das einfache Gegenbeispiel $X = \mathbb{C}^2$ und $F(z, w) = (\overline{w}, \mathrm{i}\overline{z})$ ([2], siehe auch [7]) beantwortet diese Frage negativ. In der Tat ist die Abbildung $\lambda I - F\colon\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ hier für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Lipeomorphismus mit Umkehrabbildung

$$(\lambda I - F)^{-1}(\zeta, \omega) = \left( \frac{\overline{\lambda}\zeta + \overline{\omega}}{\mathrm{i} + |\lambda|^2}, -\frac{\overline{\lambda}\omega + \mathrm{i}\overline{\zeta}}{\mathrm{i} - |\lambda|^2} \right).$$

Wir betonen, dass das Spektrum (4) nach Konstruktion stets kompakt und nichtleer ist. Insbesondere folgt hieraus, dass es nicht mit dem Kachurovskij-Spektrum (5) übereinstimmen kann. So muss auch in dem gerade erwähnten Gegenbeispiel $\Sigma(F) \neq \emptyset$ sein: man sieht etwa, dass $\sigma(F^\#)$ die Eigenwerte $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm \mathrm{i})$ mit Eigenfunktion $f(z, w) = \lambda\overline{z} + w$ für $\lambda^2 = \mathrm{i}$ und Eigenfunktion $f(z, w) = \lambda z + \overline{w}$ für $\lambda^2 = -\mathrm{i}$ enthält.

Wie im linearen Fall definieren wir den *Spektralradius* von $F$ durch

$$r_\Sigma(F) := \sup\{|\lambda|\colon\ \lambda \in \Sigma(F)\}. \tag{6}$$

Der folgende Satz zeigt, dass man den Spektralradius (6) durch eine "Gel'fand-Formel" berechnen kann:

**Satz 2.** *Für $F \in \mathfrak{Lip}_0(X,X)$ gilt*

$$r_\Sigma(F) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[F^n]_{\text{Lip}}}. \tag{7}$$

B e w e i s. Sei $r(F^\#)$ der übliche Spektralradius des linearen Operators $F^\#$ in $X^\#$. Wegen $(F^n)^\# = (F^\#)^n$ und der in Lemma 1 bewiesenen Gleichheit $\|F^\#\| = [F]_{\text{Lip}}$ haben wir dann

$$r_\Sigma(F) = r(F^\#) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(F^\#)^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(F^n)^\#\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[F^n]_{\text{Lip}}}$$

wie behauptet. □

Wir bemerken, dass ein analoges Ergebnis für das Kachurovskij-Spektrum (5) nicht gilt. Sei beispielsweise $X = \mathbb{R}$, $F(x) \equiv 0$ für $x \leqslant 1$, $F(x) = x - 1$ für $1 \leqslant x \leqslant 2$, und $F(x) \equiv 1$ für $x \geqslant 2$. Eine triviale Rechnung zeigt, dass $[F]_{\text{Lip}} = 1$ und $\sigma_K(F) = [0,1]$ ist. Andererseits gilt $F^n(x) \equiv 0$ für alle $n \geqslant 2$, so dass eine (7) entsprechende Gleichheit nicht gelten kann. Aus (7) folgt übrigens, dass in diesem Beispiel $\Sigma(F) = \{0\}$ ist, d.h. $\Sigma(F) \subset \sigma_K(F)$.

Leider hat unser Spektrum (4) einen entscheidenden Mangel: Es muss im linearen Fall nicht mit dem üblichen Spektrum übereinstimmen! Um dies zu sehen, betrachten wir das triviale Beispiel $X = \mathbb{R}$ und $F(x) = -x$. Offensichtlich ist $\sigma(F) = \sigma_K(F) = \{-1\}$. Weiter gilt natürlich auch $-1 \in \sigma(F^\#)$, denn für $f(x) = x$ haben wir $F^\#(f) = -f$. Darüberhinaus gilt aber auch $1 \in \sigma(F^\#)$, denn für $g(x) = |x|$ haben wir $F^\#(g) = g$. Wegen $(F^\#)^2 = I$ kann es keine weiteren Spektralwerte geben, d.h. wir haben $\Sigma(F) = \{\pm 1\} \supset \sigma_K(F)$ in diesem Beispiel. Damit haben wir auch gezeigt, dass die Spektren (4) und (5) *unabhängig* voneinander sind, d.h. keines von beiden ist in dem anderen enthalten.

Im Hinblick auf diese enttäuschenden Beispiele könnte man versucht sein, in der Definition des Spektrums $\Sigma(F)$ das Kreuz # “aussen” statt “innen” anzubringen, also (4) zu ersetzen durch

$$\widehat{\Sigma}(F) := \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda I - F)^\# \text{ ist nicht bijektiv}\}. \tag{8}$$

Da im allgemeinen $(F+G)^\# \neq F^\# + G^\#$ gilt, sind die Spektren (4) und (8) verschieden. Das Spektrum (8) stimmt natürlich im linearen Fall mit dem klassischen Spektrum überein. Satz 1 zeigt allerdings, dass wir für $F \in \mathfrak{Lip}_0(X,X)$ stets $\widehat{\Sigma}(F) = \sigma_K(F)$ haben, d.h. das Spektrum (8) ergibt gegenüber dem Kachurovskij-Spektrum nichts Neues.

Die oben durchgeführte Konstruktion einer Pseudo-Adjungierten und eines Spektrums lassen sich auch auf nichtlineare Operatoren übertragen, die nicht notwendig

Lipschitz-stetig sind. Wir skizzieren kurz, wie eine parallele Theorie für die Klasse $\mathfrak{C}(X,Y)$ aller stetigen Operatoren zwischen zwei Banachräumen $X$ und $Y$ aussähe. Wie oben setzen wir $X^\flat := \mathfrak{C}(X,\mathbb{K})$ für einen Banachraum $X$ über $\mathbb{K}$. Ordnet man dann in Analogie zu (1) jedem $F \in \mathfrak{C}(X,Y)$ eine Pseudo-Adjungierte $F^\flat\colon\ Y^\flat \to X^\flat$ mit

$$F^\flat(g)(x) := g(F(x)) \qquad (g \in Y^\flat,\ x \in X) \tag{9}$$

zu, so kann man ähnlich wie in Satz 1 zeigen, dass $F\colon\ X \to Y$ genau dann ein Homöomorphismus ist, wenn $F^\flat\colon\ Y^\flat \to X^\flat$ ein linearer Isomorphismus ist. Der Beweis benutzt im wesentlichen den Trennungssatz von Tietze-Uryson und gilt daher allgemeiner für metrische (oder sogar normale topologische) Räume $X$ und $Y$.

Definieren wir in Analogie zu (4) ein Spektrum für $F \in \mathfrak{C}(X,X)$ durch

$$\Sigma(F) := \sigma(F^\flat) = \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - F^\flat \text{ ist nicht bijektiv}\}, \tag{10}$$

so hat dieses Spektrum dieselben Vor- und Nachteile wie das entsprechende Spektrum für Lipschitz-stetige Operatoren. Setzen wir dagegen analog zu (8)

$$\widehat{\Sigma}(F) := \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda I - F)^\flat \text{ ist nicht bijektiv}\}, \tag{11}$$

so stimmt dieses Spektrum wegen der eben erwähnten Äquivalenz mit dem Spektrum

$$\sigma_R(F) := \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - F \text{ ist kein Homöomorphismus}\} \tag{12}$$

überein, welches 1977 von Rhodius [12] eingeführt wurde.

*Bibliographie*


[1] *Appell, J.; De Pascale, E.; Vignoli, A.*: A comparison of different spectra for nonlinear operators. Nonlin. Anal. To appear.

[2] *Appell, J.; Dörfner, M.*: Some spectral theory for nonlinear operators. Nonlin. Anal. *28(12)* (1997), 1955–1976.

[3] *Cacuci, D. G.; Perez, R. B.; Protopopescu, V.*: Duals and propagators: A canonical formalism for nonlinear equations. J. Math. Phys. *29* (1988), 353–361.

[4] *Caselles, V.*: Duality and nonlinear equations governed by accretive operators. Publ. Math. Fac. Sci. Besançon *12* (1990), 7–25.

[5] *Edmunds, D. E.; Webb, J. R. L.*: Remarks on nonlinear spectral theory. Boll. Un. Mat. Ital. B *2* (1983), 377–390.

[6] *Feng, W.*: A new spectral theory for nonlinear operators and its applications. Abstr. Appl. Anal. *2* (1997), 163–183.

[7] *Furi, M.; Martelli, M.; Vignoli, A.*: Contributions to the spectral theory for nonlinear operators in Banach spaces. Ann. Mat. Pura Appl. *118* (1978), 229–294.

[8] *Kachurovskij, R. I.*: Regular points, spectrum and eigenfunctions of nonlinear operators. Dokl. Akad. Nauk *188* (1969), 274–277. (Russian, Engl. transl.: Soviet Math. Dokl. *10* (1969), 1101–1105.)

[9] *Maddox, I. J.; Wickstead, A. W.*: The spectrum of uniformly Lipschitz mappings. Proc. Roy. Irish Acad. A *89* (1989), 101–114.

[10] *Nashed, M. Z.*: Differentiability and related properties of nonlinear operators: some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis. Nonlinear Functional Analysis and Applications (L. B. Rall, ed.). Academic Press, New York, 1971.

[11] *Neuberger, J. W.*: Existence of a spectrum for nonlinear transformations. Pacific J. Math. *31* (1969), 157–159.

[12] *Rhodius, A.*: Der numerische Wertebereich und die Lösbarkeit linearer und nichtlinearer Gleichungen. Math. Nachr. *79* (1977), 343–360.

[13] *Shutjaev, V. P.*: On calculation of a functional in a nonlinear problem using an adjoint equation. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. *31* (1991), 1278–1288. (Russian, Engl. transl.: J. Comput. Math. Math. Phys. *31* (1991), 8–16.)

[14] *Trenogin, V. A.*: Operators which are adjoint to nonlinear operators in weakly metric spaces. Trudy Mezhd. Konf. 175-let. P. L. Chebysheva, Izdat. MGU *1* (1996), 335–337. (Russian.)

[15] *Trenogin, V. A.*: Properties of resolvent sets and estimates for the resolvent of nonlinear operators. Dokl. Akad. Nauk *359* (1998), 24–26. (Russian.)

[16] *Yamamuro, S.*: The adjoints of differentiable mappings. J. Austral. Math. Soc. *8* (1968), 397–409.

*Anschrift des Verfassers*: *Jürgen Appell*, Universität Würzburg, Mathematisches Institut, Am Hubland, D-97074 Würzburg, Germany, e-mail: `appell@mathematik.uni-wuerzburg.de`.