Seminar Sophus Lie
1 (1991) 153–162

Quelques applications de la convexité à l'étude des fonctions sphériques sur un espace symétrique

Jacques Faraut

Les principales propriétés des fonctions sphériques se déduisent de leurs représentations intégrales. En particulier pour étudier le comportement asymptotique des fonctions sphériques on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue et pour cela il faut être capable de majorer l'intégrant par une fonction intégrable fixe. Ce sont les propriétés de convexité de la N-projection qui permettent ces majorations. Le théorème de convexité de Kostant concerne les espaces riemanniens symétriques. Un analogue a été démontré récemment par K. Neeb pour les espaces symétriques ordonnés (cf l'exposé de K. Neeb dans ce volume).

Dans la première partie nous rappelons quelques propriétés des fonctions sphériques d'un espace riemannien symétrique. La deuxième partie concerne les espaces symétriques ordonnés. Les résultats qui y sont présentés font partie d'un travail en collaboration avec J. Hilgert et G. Olafsson, actuellement en préparation [2].

Fonctions sphériques sur un espace riemannien symétrique

Soit $M = G/K$ un espace riemannien symétrique de type non compact. Le groupe de Lie G est semi-simple et connexe, K est un sous-groupe compact maximal constitué des points fixes d'une involution de Cartan θ de G. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K, et on pose

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}.$$

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$, c'est à dire un sous-espace abélien maximal. On choisit un système positif Δ^+ dans le système $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ des racines restreintes, et on pose

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha, \ N = \exp \mathfrak{n}, \ A = \exp \mathfrak{a}.$$

La décomposition d'Iwasawa peut s'écrire $G = NAK$. L'application

$$(n, Y) \mapsto n \exp(Y).x_0, \ x_0 = eK,$$

définit un difféomorphisme de $N \times \mathfrak{a}$ sur M. Si $x = n\exp(Y).x_0$ on pose

$$Y = A(x).$$

L'application $x \mapsto A(x)$, de M dans $\mathfrak{a}$ est appelée la N-projection. Pour g dans G on notera aussi $A(g) = A(gx_0)$.

Le théorème de convexité de Kostant ([3], Chapter IV, Theorem 10.6, p. 476) nous dit que la N-projection de la K-orbite Kax_0 du point ax_0 $(a \in A)$ est égale à l'enveloppe convexe $C(\log a)$ de $W.\log a$, W désignant le groupe de Weyl.

$$\{A(ka) \mid k \in K\} = C(\log a).$$

Les propriétés suivantes de la N-projection se déduisent facilement du corollaire 6.6, chapitre IV, p. 439 de [3]. Pour a dans A^+ et $\bar{n}$ dans $\bar{N} = \theta(N)$,

$$A(\bar{n}) \in -{}^+\overline{\mathfrak{a}}, \tag{I.1}$$

$$A(a\bar{n}a^{-1}) - A(\bar{n}) \in {}^+\overline{\mathfrak{a}}, \tag{I.2}$$

où ${}^+\mathfrak{a}$ est le cône ouvert dual de la chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$,

$$\mathfrak{a}^+ = \{X \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \Delta^+,\ \alpha(X) > 0\}.$$

Les fonctions sphériques φ_λ de l'espace symétrique $M = G/K$ sont définies par l'intégrale suivante

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(i\lambda+\rho)\left(A(kx)\right)}dk,$$

pour x dans M ou dans G, où ρ désigne la demi-somme des racines positives,

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} m_\alpha \alpha.$$

Si $x = a \in A$, on peut transformer cette intégrale en une intégrale sur $\bar{N}$,

$$\varphi_\lambda(a) = e^{(i\lambda-\rho)(\log a)}\int_{\bar{N}} e^{(\rho-i\lambda)\left(A(a\bar{n}a^{-1})\right)}e^{(\rho+i\lambda)\left(A(\bar{n})\right)}d\bar{n},$$

la mesure de Haar de $\bar{N}$ étant normalisée de telle sorte que

$$\int_{\bar{N}} e^{2\rho\left(A(\bar{n})\right)}d\bar{n} = 1.$$

Cette représentation intégrale permet de déterminer le comportement asymptotique de φ_λ ([3], Chapter IV, Theorem 6.14, p. 447).

I.1. Théorème. *Pour X dans $\mathfrak{a}^+$ et si $\Re(i\lambda) \in \mathfrak{a}^*_+$,*

$$\varphi_\lambda(\exp tX) \sim c(\lambda) e^{(i\lambda-\rho)(tX)},\ t \to \infty,$$

où

$$c(\lambda) = \int_{\bar{N}} e^{(i\lambda+\rho)\left(A(\bar{n})\right)} d\bar{n}.$$

Démonstration. On montre que la fonction

$$\bar{n} \mapsto e^{(i\lambda+\rho)\left(A(\bar{n})\right)}$$

est intégrable si $\Re(i\lambda) \in \mathfrak{a}^*_+$, et que son intégrale $c(\lambda)$ n'est pas nulle. D'autre part, si $a_t = \exp(tX)$,

$$\lim_{t\to\infty} A(a_t \bar{n} a_{-t}) = 0.$$

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. C'est là qu'interviennent les propriétés de convexité de la N-projection. Posons $\mu = \Re(i\lambda)$. On peut trouver ε, $0 < \varepsilon < 1$, tel que

$$\rho - \varepsilon\mu \in \mathfrak{a}^*_+,$$

On déduit alors des propriétés (I.1) et (II.2) que

$$\begin{aligned}(\mu - \rho)\big(A(a\bar{n}a^{-1})\big) &\geq (1-\varepsilon)\mu\big(A(a\bar{n}a^{-1})\big) \\ &\geq (1-\varepsilon)\mu\big(A(\bar{n})\big).\end{aligned}$$

Par suite

$$\left| e^{(\rho-i\lambda)\left(A(a\bar{n}a^{-1})\right)} e^{(\rho+i\lambda)\left(A(\bar{n})\right)} \right| \leq e^{(\varepsilon\mu+\rho)\left(A(\bar{n})\right)},$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $\bar{N}$. ∎

Pour a dans A on note μ_a la mesure définie sur $\mathfrak{a}$ par

$$\int_{\mathfrak{a}} f(X) d\mu_a(X) = \int_K f\big(A(ka)\big) dk,$$

c'est à dire que μ_a est l'image par l'application $k \mapsto A(ka)$ de la mesure de Haar de K. C'est une mesure positive de masse totale égale à 1. D'après le théorème de convexité de Kostant son support est égal à $C(\log a)$. Nous pouvons écrire

$$\varphi_\lambda(a) = \int_{\mathfrak{a}} e^{i\lambda(X)} e^{\rho(X)} d\mu_a(X).$$

Puisque $\varphi_{w\lambda} = \varphi_\lambda$, pour w dans W, la mesure $e^\rho d\mu_a$ est invariante par W.

Proposition I.2. *Si λ appartient au tube $\mathfrak{a}^* + iC(\rho)$ de $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{C}}$, alors*

$$|\varphi_\lambda(g)| \leq 1.$$

Réciproquement Helgason et Johnson ont montré que si φ_λ est bornée, alors λ appartient au tube $\mathfrak{a}^* + iC(\rho)$ ([3], Chapter IV, Theorem 8.1, p. 458).

Démonstration. On remarque d'abord que $\varphi_{i\rho} \equiv 1$, et aussi que $\varphi_{-i\rho} \equiv 1$, puisque $\varphi_{-\lambda}(g) = \varphi_\lambda(g^{-1})$. Il en résulte que, pour w dans W, $\varphi_{iw\rho} \equiv 1$.

D'autre part l'application

$$\mu \mapsto \varphi_{i\mu}(a) = \int_{\mathfrak{a}} e^{-\mu(X)} e^{\rho(X)} d\mu_a(X)$$

est convexe. Si $\mu \in C(\rho)$,

$$\mu = \sum_{w \in W} \alpha_w w\rho,$$

avec des nombres $\alpha_w \geq 0$, vérifiant

$$\sum_{w \in W} \alpha_w = 1,$$

et

$$\varphi_{i\mu}(a) \leq \sum_{w \in W} \alpha_w \varphi_{iw\rho}(a) = 1.$$

Ceci démontre la proposition puisque, pour λ, μ dans $\mathfrak{a}^*$,

$$|\varphi_{\lambda + i\mu}(g)| \leq \varphi_{i\mu}(g). \qquad \blacksquare$$

II. Fonctions sphériques sur un espace symétrique ordonné

Considérons maintenant un espace symétrique non riemannien $M = G/H$ de type régulier (voir [4], II). Le groupe de Lie G est semi-simple et connexe, la paire (G, H) est symétrique, c'est à dire qu'il existe une involution σ de G telle que

$$(G_\sigma)^0 \subset H \subset G_\sigma,$$

où $G_\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$, et où $(G_\sigma)^0$ est la composante connexe de l'élément neutre dans G_σ. On note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et on pose

$$\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}.$$

Il existe une involution de Cartan θ qui commute avec σ. Lui sont associés K, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ comme dans la première partie. Dire que l'espace symétrique $M = G/H$ est de type régulier signifie qu'il existe dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ un vecteur non nul X_0 invariant par $K \cap H$. Dans ces conditions il existe un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$ qui est contenu dans $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$. De plus on peut supposer que $X_0 \in \mathfrak{a}$ et que les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X_0)$ sont $-1, 0, 1$. On note

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres de $\mathrm{ad}(X_0)$, et $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie de $G_0 = Z_G(X_0)$. Dans le système de racines $\Delta_0 = \Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a})$ on choisit un système positif Δ_0^+ et on pose

$$\Delta^+ = \Delta_0^+ \cup \Delta_1,$$

avec

$$\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \mid \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}_1\}.$$

Nous considérons dans $\mathfrak{a}$ les deux cônes suivants

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \{X \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \Delta_1,\ \alpha(X) \leq 0\}, \\ C_{\min} &= C_{\max}^*, \end{aligned}$$

et dans $\mathfrak{p}$ le cône convexe fermé C qui est H-invariant et tel que

$$C \cap \mathfrak{a} = C_{\max}.$$

A ce cône est associé le semi-groupe $S = \exp(C)H$, et ce semi-groupe définit sur $M = G/H$ un ordre partiel invariant,

$$x = g_1 x_0 \geq y = g_2 x_0 \text{ si } g_2^{-1} g_1 \in S \ (x_0 = eH).$$

Nous définissons $\mathfrak{n}$, N et ρ comme dans la section 1, et de plus

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_0 &= \sum_{\alpha\in\Delta_0^+} \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_0, N_0 = \exp\mathfrak{n}_0 = N \cap G_0,\ \rho_0 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_0^+} m_\alpha \alpha, \\ \mathfrak{n}_1 &= \sum_{\alpha\in\Delta_1} \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_1, N_1 = \exp\mathfrak{n}_1,\ \rho_1 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_1} m_\alpha\alpha. \end{aligned}$$

Alors N_0 et N_1 sont des sous-groupes de N, N_1 est abélien, N_0 normalise N_1 et $N = N_0 N_1$ est un produit semi-direct. De plus G_0 normalise N_1.

Au niveau de l'algèbre de Lie la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{a} + \mathfrak{h},$$

est une somme directe, mais l'ensemble NAH n'est pas égal à G, c'est seulement un ouvert de G. L'application

$$(n, Y) \mapsto n\exp(Y).x_0$$

est un difféomorphisme de $N \times A$ sur l'ouvert $NA.x_0$. Pour x dans cet ouvert, $x = n\exp(Y).x_0$, on pose

$$A(x) = Y.$$

Si $a \in S \cap A = \exp(C_{\max})$, l'orbite $Ha.x_0$ est contenue dans $NA.x_0$, ([4],Lemma 8) et le théorème de convexité de K. NEEB ([4], Theorem 9, [5], Theorem IV.14) se traduit par, si $a \neq e$,

$$\{A(ha) \mid h \in H\} = C(\log a) + C_{\min}.$$

De ce théorème on déduit les propriétés suivantes : pour $\bar{n} \in \bar{N} \cap NAH$, $a \in \exp(C_{\max})$,

$$A(a^{-1}\bar{n}a) - A(\bar{n}) \in C_{\min}, \tag{II.1}$$

$$A(\bar{n}) \in -C_{\min}. \tag{II.2}$$

On montre que

$$\bar{N} \cap NAH = \bar{N}_0.\Omega, \ \ \Omega = \exp D,$$

où D est un ouvert borné de $\bar{\mathfrak{n}}_1$.

Exemple. Soient $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $H = \mathrm{SO}(p,q)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $H = \mathrm{SU}(p,q)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $p + q = n$, $p, q \geq 1$. L'involution σ de $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{F})$ est définie par

$$\sigma(X) = -I_{pq}X^*I_{pq}, \ \ I_{pq} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

L'élément X_0 est le suivant

$$X_0 = \begin{pmatrix} \alpha I_p & 0 \\ 0 & -\beta I_q \end{pmatrix}, \ \alpha = \frac{q}{n}, \ \beta = \frac{p}{n}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= s\ell(p, \mathbb{F}) \oplus s\ell(q, \mathbb{F}) \oplus \mathbb{F}, \\ \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_1 &= \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in M(p,q;\mathbb{F})\}, \\ \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{n}_{-1} &= \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid y \in M(q,p;\mathbb{F})\}. \end{aligned}$$

Le sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ est constitué des matrices diagonales réelles de trace nulle, et

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \{X = \mathrm{diag}(t) \mid \forall i,j, \ 1 \leq i \leq p, \ p+1 \leq j \leq n, \ t_i + t_j \leq 0\}, \\ C_{\min} &= \{X = \mathrm{diag}(t) \mid \forall i, \ 1 \leq i \leq n, \ t_i \leq 0\}. \end{aligned}$$

Le sous-espace $\mathfrak{q}$ est constitué des matrices X telles que $I_{pq}X$ soit symétrique (resp. hermitienne), et le cône C est constitué des matrices X de $\mathfrak{q}$ telles que

$$\xi^* I_{pq} X \xi \leq 0,$$

pour tout vecteur ξ de $\mathbb{F}^n$ tel que $\xi^* I_{pq} \xi = 0$.

Le domaine D est constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \ y \in M(q,p;\mathbb{F}),$$

telles que $I_p - y^*y$ soit définie positive.

Les fonctions sphériques de l'espace symétrique ordonné $X = G/H$ sont définies par

$$\varphi_\lambda(x) = \int_H e^{(\rho-\lambda)\left(A(hx)\right)} dh.$$

Pour étudier la convergence de cette intégrale et le comportement asymptotique de la fonction φ_λ nous allons transformer cette intégrale en une intégrale sur $\bar{N}$.

Pour $\bar{n} \in \bar{N} \cap NAH$, on écrit $\bar{n} = n \exp A(\bar{n}) u(\bar{n})$, et l'application

$$\bar{n} \mapsto u(\bar{n}) Z_H(A)$$

est un difféomorphisme de $\bar{N} \cap NAH$ sur $H/Z_H(A)$. La fonction $\varphi_\lambda(a)$ s'écrit

$$\varphi_\lambda(a) = e^{(\rho-\lambda)(\log a)} \int_{\bar{N}\cap NAH} e^{(\rho-\lambda)\left(A(a^{-1}\bar{n}a)\right)} e^{(\rho+\lambda)\left(A(\bar{n})\right)} d\bar{n}.$$

Avant de déterminer à quelle condition cette intégrale converge, considérons d'abord l'intégrale suivante

$$c_\Omega(\lambda) = \int_\Omega e^{(\rho+\lambda)\left(A(\bar{n})\right)} d\bar{n}_1.$$

Proposition II.1. *L'intégrale définissant $c_\Omega(\lambda)$ converge si*

$$\Re\lambda + \rho \in C_{\max}.$$

Démonstration. Puisque Ω est borné, il suffit de montrer que l'intégrant est borné. Or, d'après (II.2), $A(\bar{n}) \in -C_{\min}$, donc

$$\Re(\rho+\lambda)\big(A(\bar{n})\big) \leq 0,$$

et

$$|e^{(\rho+\lambda)\left(A(\bar{n})\right)}| \leq 1. \qquad \blacksquare$$

Nous ne connaissons pas actuellement le domaine de convergence exact. Pour certains exemples nous pouvons montrer qu'il est en fait strictement plus grand que

$$\{\lambda \mid \Re\lambda + \rho \in C_{\max}\}.$$

II.2. Lemme. *Soit Q un compact contenu dans Ω, et soit $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Il existe une constante $M(Q,\nu)$ telle que*

$$|e^{\nu\left(A(\bar{n}_0\bar{n}_1)\right)}| \leq M(Q,\nu) |e^{\nu\left(A(\bar{n}_0)\right)}|,$$

pour tout $\bar{n}_0$ de $\bar{N}_0$ et tout $\bar{n}_1$ de Q.

Démonstration. On utilise la décomposition d'Iwasawa $G_0 = N_0AK_0$ du groupe G_0, $K_0 = K \cap G_0$,

$$\bar{n}_0 = n_0 \exp A(\bar{n}_0)u_0(\bar{n}_0),$$

avec $n_0 \in N_0$, $u(\bar{n}_0) \in K_0$. Alors

$$\begin{aligned}\bar{n}_0\bar{n}_1 &= n_0 \exp A(\bar{n}_0)u_0(\bar{n}_0)\bar{n}_1,\\ A(\bar{n}_0\bar{n}_1) &= A(\bar{n}_0) + A\big(u(\bar{n}_0)\bar{n}_1\big),\end{aligned}$$

et $u(\bar{n}_0)\bar{n}_1$ varie dans le compact K_0Q quand $\bar{n}_0$ varie dans $\bar{N}_0$ et $\bar{n}_1$ dans Q. Ce compact étant contenu dans Ω on peut poser

$$M(Q,\nu) = \sup_{\bar{n}_1 \in K_0Q} |e^{\nu\left(A(\bar{n}_1)\right)}|. \qquad \blacksquare$$

II.3. Théorème. *Si a appartient à l'intérieur de $S \cap A$, et si $\Re\lambda + \rho \in C_{\max}$, l'intégrale définissant la fonction sphérique $\varphi_\lambda(a)$ est absolument convergente.*

Démonstration. Si a appartient à l'intérieur de $S \cap A$, alors $\Omega_a = a^{-1}\Omega a$ est relativement compact dans Ω. Posons $\mu = \Re\lambda$. De la relation

$$A(\bar{n}_0\bar{n}_1) = A(\bar{n}_0) + A\big(u(\bar{n}_0)\bar{n}_1\big),$$

on déduit que

$$\int_\Omega e^{(\lambda+\rho)\left(A(\bar{n}_0\bar{n}_1)\right)}d\bar{n}_1 = e^{(\lambda+\rho)\left(A(\bar{n}_0)\right)}c_\Omega(\lambda).$$

En utilisant le lemme II.2 nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_{\bar{N}\cap NAH} |e^{(\rho-\lambda)\left(A(a^{-1}\bar{n}a)\right)}e^{(\rho+\lambda)\left(A(\bar{n})\right)}|d\bar{n}\\ &\leq M(\overline{\Omega_a},\rho-\mu)c_\Omega(\mu)\int_{\bar{N}_0} e^{(\rho-\mu)\left(A(a^{-1}\bar{n}_0a)\right.}e^{(\rho+\mu)\left(A(\bar{n}_0)\right)}d\bar{n}_0.\end{aligned}$$

La valeur de cette dernière intégrale est précisément la fonction sphérique

$$\varphi^0_{-i\mu}(a^{-1}) = \varphi^0_{i\mu}(a)$$

de l'espace riemannien symétrique G_0/K_0, car, pour $\bar{n}_0$ dans $\bar{N}_0$,

$$\rho\big(A(\bar{n}_0)\big) = \rho_0\big(A(\bar{n}_0)\big). \qquad \blacksquare$$

II.4. Théorème. *Supposons que $\Re\lambda \in \mathfrak{a}^*_+$ et que $\Re\lambda + \rho \in C_{\max}$. Pour X dans $-\mathfrak{a}^+$,*

$$\lim_{t\to\infty} e^{(\lambda-\rho)(\exp tX)}\varphi_\lambda(\exp tX) = c_0(\lambda)c_\Omega(\lambda).$$

Démonstration. Posons $a_t = \exp tX$. Puisque, pour $\bar{n} \in \bar{N}$,

$$\lim_{t\to\infty} A(a_{-t}\bar{n}a_t) = 0,$$

il suffit de montrer qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Pour $t_0 > 0$ l'ensemble

$$\omega = \bigcup_{t\geq t_0} a_{-t}\Omega a_t$$

est relativement compact dans Ω. D'après le Lemme II.2, pour $\mu = \Re\lambda$, $\bar{n} = \bar{n}_0\bar{n}_1$,

$$\begin{aligned}&|e^{(\rho-\lambda)\left(A(a_{-t}\bar{n}a_t)\right)}|\\ &\leq M(\bar{\omega}, \rho-\mu)e^{(\rho-\lambda)\left(A(a_{-t}\bar{n}_0a_t)\right)}.\end{aligned}$$

La démonstration se poursuit comme celle du théorème I.1. On peut trouver ε, $0 < \varepsilon < 1$, tel que

$$\rho_0 - \varepsilon\mu \in \mathfrak{a}^*_+,$$

et alors

$$\begin{aligned}&|e^{(\rho-\lambda)\left(A(a_{-t}\bar{n}a_t)\right)}e^{(\rho+\lambda)\left(A(\bar{n})\right)}|\\ &\leq M(\bar{\omega}, \rho-\mu)e^{(\varepsilon\mu+\rho_0)\left(A(\bar{n}_0)\right)}e^{(\mu+\rho)\left(A(u(\bar{n}_0)\bar{n}_1\right)},\end{aligned}$$

qui est une fonction intégrable sur $\bar{N}_0 \times \Omega$. ■

Remarquons que dans les théorèmes II.3 et II.4 on peut remplacer la condition $\Re\lambda + \rho \in C_{\max}$ par la condition

$$\int_\Omega |e^{(\lambda+\rho)\left(A(\bar{n}_1)\right)}|dn_1 < \infty.$$

Dans certains cas il est possible de vérifier que ces conditions sont différentes. En particulier lorsque $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $H = \mathrm{SO}(1,1)$, la représentation intégrale de la fonction sphérique s'écrit, si $a_t = \exp(-tX_0)$ $(t > 0)$, $\lambda = -s\rho$ $(s \in \mathbb{C})$,

$$\varphi_\lambda(a_t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{ch}^2\,\theta e^t - \mathrm{sh}^2\,\theta e^{-t})^{-\frac{s+1}{2}}d\theta.$$

Cette intégrale converge si $\Re s > -1$. Or la condition $\Re\lambda + \rho \in C_{\max}$ signifie que $\Re s > 1$.

C'est aussi le cas pour les espaces G/H avec $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ et $H = \mathrm{Su}(p,q)$ pour lesquels il est possible de calculer explicitement l'intégrale définissant les fonctions sphériques [1].

References

[1] Faraut, J., *Algèbres de Volterra et transformation de Laplace sphérique sur certains espaces symétriques ordonnés*, Symposia mathematica **29** (1987), 183–196.

[2] Faraut J., J. Hilgert, and G. Olafsson, "Harmonic analysis on ordered symmetric spaces", en préparation.

[3] Helgason S., "Groups and geometric analysis", Academic Press, 1984.

[4] Neeb K. H., *Convexity theorems in harmonic analysis*, dans ce volume.

[5] —, *A convexity theorem for semi-simple symmetric spaces*, Preprint TH Darmstadt, 1991.

[6] Olafsson G., "Causal symmetric spaces", Math. Gotting. **15** (1990).

Analyse Complexe et Géométrie
Département de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu,
F-75252 Paris cedex 05, France

Received October 16, 1991