Caustique de la surface ellipsoïdale à trois dimensions

Alain Joets et Roland Ribotta

TABLE DES MATIÈRES

L'ellipsoïde tridimensionnel est pris comme modèle d'un système engendrant une configuration globale de singularités interconnectées de l'espace R^4. La caustique, enveloppe des normales à l'ellipsoïde, est analysée et calculée. En particulier, nous montrons qu'elle possède quatre courbes fermées d'ombilics hyperboliques. Nos résultats suggèrent certaines propriétés de la caustique de l'ellipsoïde de l'espace multidimensionnel général.

The 3D ellipsoid is used as a model for a system generating a global configuration of interconnected singularities in R^4. The caustic obtained as the envelope of the normals to the ellipsoid is analyzed and calculated. In particular, we show that it has four closed curves of hyperbolic umbilics. Our results suggest some properties of the caustic of the ellipsoid in R^n.

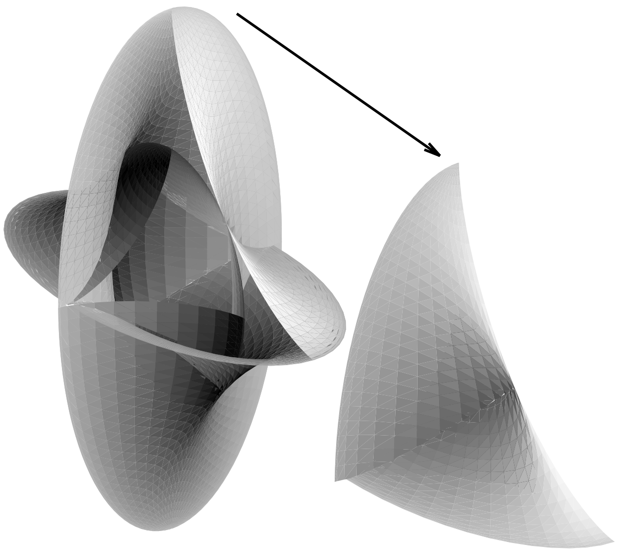

FIGURE 1. Astroïde de Cayley, enveloppe des normales à un ellipsoïde triaxial de l'espace $\mathbb{R}^3$. Un octant a été découpé et translaté pour une meilleure compréhension de la surface.

1. POSITION DU PROBLÈME

La théorie des singularités décrit tous les types de singularités élémentaires par des modèles *locaux* appelés formes normales. Le problème de l'organisation *globale* des singularités, en dépit de son importance, est beaucoup moins bien compris et très peu d'exemples ont été décrits dans la littérature. Font exception: l'ensemble des bifurcations de la machine à catastrophes de Zeeman [Poston et Stewart 1978] qui est topologiquement équivalent à la caustique de l'ellipse; l'astroïde de Cayley [1873], surface enveloppe des normales à un ellipsoïde triaxial de l'espace (voir figure 1). La topologie de l'astroïde de Cayley intervient dans l'étude des aberrations des faisceaux d'électrons [Glaser et Grümm 1950; Leisegang 1953], les aberrations optiques [Berry 1981] et des caustiques produites par des ondes lumineuses traversant des cristaux liquides [Joets et Ribotta 1996]. Ainsi les caustiques associées à des surfaces aussi simples que celles des ellipsoïdes sont capables de reproduire les caractéristiques de certaines structures singulières globales rencontrées en Physique.

Cette étude a bénéficié du soutien financier de la DGA/DRET, contrat n° 94-136.

1058-6458/1999 $0.50 per page

Elles possèdent aussi la propriété d'être sans branche infinie, qui est une condition importante dans l'organisation globale des singularités optiques [Chekanov 1986]. Nous nous proposons d'analyser dans cette note le cas quadridimensionnel. Ce cas peut servir de modèle pour décrire des structures singulières décrites par plus de quatre paramètres, comme par exemple: une caustique formée par un émetteur en mouvement lent (le temps apparaît ici comme un paramètre supplémentaire lié à l'émetteur et distinct de celui de la propagation le long des rayons), un diagramme de bifurcations d'une structure élastique (les paramètres supplémentaires peuvent décrire les propriétés élastiques du matériau), le diagramme de transitions de phases d'un système thermodynamique couplé à plusieurs champs externes, etc. Comme pour les cas tridimensionnels déjà cités, l'application peut exiger d'autres surfaces que celles définies par des formes quadratiques. Cependant ces mêmes cas montrent que le modèle géométrique construit à partir d'un ellipsoïde est déjà capable de reproduire une grande partie de la *topologie* observée. Par exemple il rend compte de la connexion de paires d'ombilics hyperboliques par une ligne fronce commune.

2. LA MÉTHODE DE CALCUL

L'ellipsoïde E^3 à quatre axes inégaux de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4 = \{x, y, z, t\}$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{t^2}{d^2} = 1,$$

où $a > b > c > d$. Les points de E^3 sont paramétrés par 3 angles notés α, β, γ:

$$\begin{aligned} x &= a \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma, \\ y &= b \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma, \\ z &= c \cos\alpha \sin\beta, \\ t &= d \sin\alpha, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \beta \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \gamma \in [0, 2\pi].$$

Considérons un point $P = (x, y, z, t)$ de l'ellipsoïde, d'angles α, β et γ. Introduisons la variable s pour paramétrer les points de la normale à E^3 passant le point P. Les coordonnées cartésiennes (X, Y, Z, T) des points de la normale s'expriment par:

$$\begin{aligned} X(\alpha, \beta, \gamma, s) &= (a + s/a) \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma, \\ Y(\alpha, \beta, \gamma, s) &= (b + s/b) \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma, \\ Z(\alpha, \beta, \gamma, s) &= (c + s/c) \cos\alpha \sin\beta, \\ T(\alpha, \beta, \gamma, s) &= (d + s/d) \sin\alpha. \end{aligned}$$

On définit ainsi une application f de l'espace *source* $\{\alpha, \beta, \gamma, s\}$ dans l'espace *but* $\mathbb{R}^4$:

$$f(\alpha, \beta, \gamma, s) = (X(\alpha, \beta, \gamma, s),\ Y(\alpha, \beta, \gamma, s),\ Z(\alpha, \beta, \gamma, s),\ T(\alpha, \beta, \gamma, s)).$$

L'ensemble singulier Σ est, par définition, l'ensemble des points où le rang de f n'atteint pas sa valeur maximale possible 4. La caustique C, encore appelée ensemble focal, est l'image de l'ensemble singulier: $C = f(\Sigma)$. Localement la caustique, au voisinage de la plupart de ses points, est une variété de dimension 3. Mais globalement elle n'est pas une variété régulière: elle présente elle-même des singularités de diverses dimensions (inférieures à 3), et de nombreuses auto-intersections. Pour comprendre sa topologie il est nécessaire de comprendre sa structure en singularités de différents types. Pour cela, un moyen simple est d'utiliser la caractérisation des singularités par leur rang, ou plutôt leur corang, due à R. Thom [Thom 1956; Porteous 1971; Arnol'd et al. 1985]. Nous avons déjà montré comment cette méthode s'applique à l'étude des caustiques élémentaires de l'espace ordinaire et de leurs transformations [Joets et Ribotta 1995].

3. LES SINGULARITÉS DE CORANG 1

Les singularités les plus simples sont les singularités plis. Elles forment (localement) une variété de dimension 3. Elles correspondent à la classe Σ^1, définie par la condition corang $(f) = 1$ (le corang est la différence entre la dimension de l'espace source, c'est-à-dire ici 4, et le rang de la fonction au point considéré; la valeur du corang est portée dans le symbole Σ). La condition s'écrit aussi

$$\det \frac{\partial(X, Y, Z, T)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, s)} = 0,$$

et conduit à l'équation du troisième degré en s:

$$s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

où a_0, a_1, a_2 sont définis par:

$$
\begin{aligned}
a_0(\alpha,\beta,\gamma) &= d^2\cos^2\alpha\left(c^2\cos^2\beta(b^2\cos^2\gamma+a^2\sin^2\gamma)+a^2b^2\sin^2\beta\right)+a^2b^2c^2\sin^2\alpha\\
a_1(\alpha,\beta,\gamma) &= d^2\cos^2\alpha\left(c^2\cos^2\beta+b^2\cos^2\gamma+a^2\sin^2\gamma+\sin^2\beta(a^2\cos^2\gamma+b^2\sin^2\gamma)\right)\\
&\quad+\sin^2\alpha\left(a^2b^2\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta(a^2\sin^2\gamma+b^2\cos^2\gamma)+a^2c^2\cos^2\gamma+b^2c^2\sin^2\gamma\right)\\
&\quad+a^2b^2\sin^2\beta+c^2\cos^2\beta(b^2\cos^2\gamma+a^2\sin^2\gamma)\\
a_2(\alpha,\beta,\gamma) &= d^2\cos^2\alpha+c^2\cos^2\beta+b^2\cos^2\gamma+a^2\sin^2\gamma+\sin^2\beta(a^2\cos^2\gamma+b^2\sin^2\gamma)\\
&\quad+\sin^2\alpha\left((a^2\cos^2\gamma+b^2\sin^2\gamma)\cos^2\beta+c^2\sin^2\beta\right)
\end{aligned}
$$

L'équation admet au plus trois solutions en s. L'ensemble des plis est donc composé de trois sous-ensembles tridimensionnels P_i, $i=1,2,3$.

Le deuxième type de singularité est la singularité fronce. Elle correspond à la classe $\Sigma^{1,1}$, c'est-à-dire, par définition, à la classe Σ^1 de la restriction de f à la classe des plis:

$$\Sigma^{1,1}(f)=\Sigma^1(f_{|\Sigma^1}).$$

Localement, les fronces forment des surfaces sur lesquelles s'appuient les 3 ensembles plis. Chaque solution $s(\alpha,\beta,\gamma)$ de l'équation des plis transforme X,Y,Z et T en fonctions X_1,Y_1,Z_1 et T_1 de α,β et γ:

$$X_1(\alpha,\beta,\gamma)=X(\alpha,\beta,\gamma,s(\alpha,\beta,\gamma)),\quad \text{etc.}$$

La condition sur le corang signifie que le rang de la matrice $M=\partial(X_1,Y_1,Z_1,T_1)\,/\,\partial\,(\alpha,\beta,\gamma)$ est égal à 2. Elle s'exprime donc par l'annulation de 4 jacobiens, qu'il n'est pas utile d'expliciter ici. Ces formules permettent de montrer que les 4 hyperplans de coordonnées contiennent des fronces. Elles sont données par :

1. $\cos\gamma=0$, $s=-a^2$;
2. $\sin\gamma=0$, $s=-b^2$;
3. $\beta=0$, $s=-c^2$;
4. $\alpha=0$, $s=-d^2$.

De plus, hors des 4 hyperplans de coordonnées, on peut utiliser un système de coordonnées ellipsoïdal dans lequel l'équation des plis se factorise. On s'assure alors qu'il n'existe pas d'autres surfaces fronces. Chaque surface fronce détermine une sphère topologique.

Ces dernières formules permettent d'exprimer la restriction de f à chaque surface fronce. On montre alors facilement que la restriction n'est pas singulière. Autrement dit, il n'existe pas de queue d'aronde, ni de papillon (comme il n'existe pas de queue d'aronde dans l'astroïde de Cayley).

4. LES SINGULARITÉS DE CORANG 2

Le dernier type de singularité susceptible d'exister est défini par la classe Σ^2, classe des singularités ombilics, de corang égal à 2. Localement les ombilics forment des courbes le long desquelles se rejoignent 2 ensembles plis P_i. En explicitant la condition sur le corang, on trouve qu'il existe quatre courbes fermées d'ombilics que nous appellerons *cercles d'ombilics*. Ils sont donnés par les expressions

$$
\begin{gathered}
s=-b^2,\quad \sin\gamma=0,\\
\sin^2\beta=\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\left(1-\frac{a^2-b^2}{b^2-d^2}\operatorname{tg}^2\alpha\right)
\end{gathered}
\tag{4–1}
$$

et

$$
\begin{gathered}
s=-c^2,\quad \beta=0,\\
\sin^2\gamma=\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}\left(-1+\frac{a^2-c^2}{c^2-d^2}\operatorname{tg}^2\alpha\right).
\end{gathered}
\tag{4–2}
$$

Les deux premiers cercles d'ombilics ($s=-b^2$) sont situés dans l'hyperplan $y=0$. L'un correspond à $\gamma=0$, l'autre à $\gamma=\pi$. Les deux autres cercles d'ombilics ($s=-c^2$) sont dans l'hyperplan $z=0$.

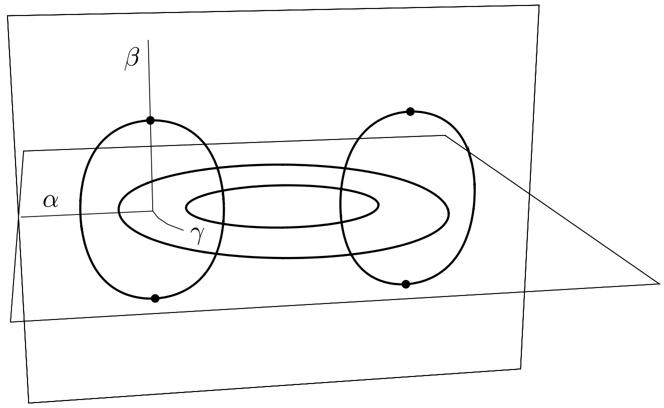

FIGURE 2. Projection des quatre courbes fermées d'ombilics sur l'espace $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, où elles apparaissent entrelacées. Les 4 points représentent les ombilics de la caustique de l'ellipsoïde de dimension 2, section de l'ellipsoïde E^3 obtenue en posant $\alpha=0$.

L'un correspond à $\alpha > 0$, l'autre à $\alpha < 0$. Ils sont représentés (dans l'espace source) sur la figure 2. On peut aussi trouver l'équation des ombilics en mettant l'équation des plis sous la forme standard:

$$S^3 + pS + q = 0$$

où $S = s + \frac{1}{3}a_2$, $p = a_1 - \frac{1}{3}a_2^2$, $q = a_0 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_2^3$, puis en écrivant que le discriminant $27q^2 + 4p^3$ s'annule. En comparant les équations des fronces à celles des ombilics, on s'aperçoit que par chaque courbe d'ombilics passe une seule surface fronce. Par conséquent, les ombilics sont tous de type hyperbolique. Voir [Garcia 1992; 1993] pour une étude des lignes de courbure au voisinage de cercles d'ombilics.

Comme il n'existe pas d'ombilics elliptiques, les ombilics paraboliques, qui séparent sur une courbe d'ombilics les ombilics hyperboliques des ombilics elliptiques, sont inexistants.

L'intersection de la caustique par un hyperplan de coordonnées redonne un astroïde de Cayley plus une sphère fronce (voir figure 3). Les 4 ombilics de cet astroïde de Cayley sont situés, dans $\mathbb{R}^4$, sur 2 des 4 cercles d'ombilics (voir figure 2).

La lecture des coupes tridimensionnelles est difficile à cause des nombreuses lignes d'auto-intersections et des parties cachées, et nous complétons la représentation de la caustique par ses sections bidimensionnelles $\{y, z\}$ pour différentes valeurs de (x, t) (voir figure 4). Les sections non vides sont obtenues pour des points (x, t) situés à l'intérieur de l'astroïde A d'équation

$$x_1^{2/3} + t_1^{2/3} = 1,$$

où

$$x_1 = \frac{ax}{a^2 - d^2}, \quad t_1 = \frac{dt}{a^2 - d^2}.$$

La section de l'un des feuillets P_i est réduite à un point le long de deux ellipses E_2 et E_3, tangentes à l'astroïde, et d'équation

$$x_2^2 + t_2^2 = 1,$$

où

$$x_2 = \frac{ax}{a^2 - b^2}, \quad t_2 = \frac{dt}{b^2 - d^2},$$

et

$$x_3^2 + t_3^2 = 1,$$

où

$$x_3 = \frac{ax}{a^2 - c^2}, \quad t_3 = \frac{dt}{c^2 - d^2}.$$

Les sections coupent les cercles d'ombilics pour des valeurs de (x, t) situées le long de quatre arcs, dont l'équation se calcule à partir des formules (4–1) et (4–2) (arcs notés a sur la figure 4). Les arcs rencontrent l'astroïde A aux points de tangence des ellipses avec A. Ces différentes lignes délimitent des domaines dans le plan $\{x, t\}$ où les sections sont de même type.

5. DISCUSSION

Nous venons de trouver la structure de la caustique de l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^4$. En comparant notre résultat avec les deux cas déjà connus (caustiques des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$), nous voyons apparaître des points communs. Plus précisément, si n désigne la dimension de l'espace ambiant, les plis sont composés de $n-1$ feuillets de dimension $n-1$; les fronces sont des $(n-2)$-sphères situées dans les n hyperplans de symétrie, les queues d'aronde sont inexistantes; les ombilics sont hyperboliques ($n > 2$) et sont situés dans les $n - 2$ hyperplans moyens (les hyperplans perpendiculaires aux axes de l'ellipsoïde de longueur non-maximale et non-minimale); ils forment $2(n-2)$ sphères à $n-3$ dimensions. Ce dernier point est aussi vrai, comme nous l'avons vérifié, pour l'ellipsoïde de l'espace à 5 dimensions. De façon plus générale et répondant incidemment à une question posée récemment [Arnol'd 1996], nous suggérons que ces relations sont aussi valables en toute dimension $n > 4$.

BIBLIOGRAPHIE

[Arnol'd 1996] V. I. Arnol'd, "Singularity theory", Prépublication CEREMADE n° 9609, Univ. Paris IX, Paris, 1996.

[Arnol'd et al. 1985] V. I. Arnol'd, S. M. Guseĭn-Zade et A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps, I: The classification of critical points, caustics and wave fronts*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[Berry 1981] M. V. Berry, "Singularities in waves and rays", pp. 454–543 dans *Physique des défauts* (Les Houches, France, 1980), édité par R. Balian et al., North-Holland, Amsterdam, 1981.

[Cayley 1873] A. Cayley, "On the centro-surface of an ellipsoid", *Trans. Camb. Phil. Soc.* **12** (1873), 319–365.

[Chekanov 1986] Y. V. Chekanov, "The caustics of geometric optics", *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **20**:3 (1986), 66–69, 96. In Russian; translated in *Funct. Anal. Appl.* **20** (1986), 223–226.

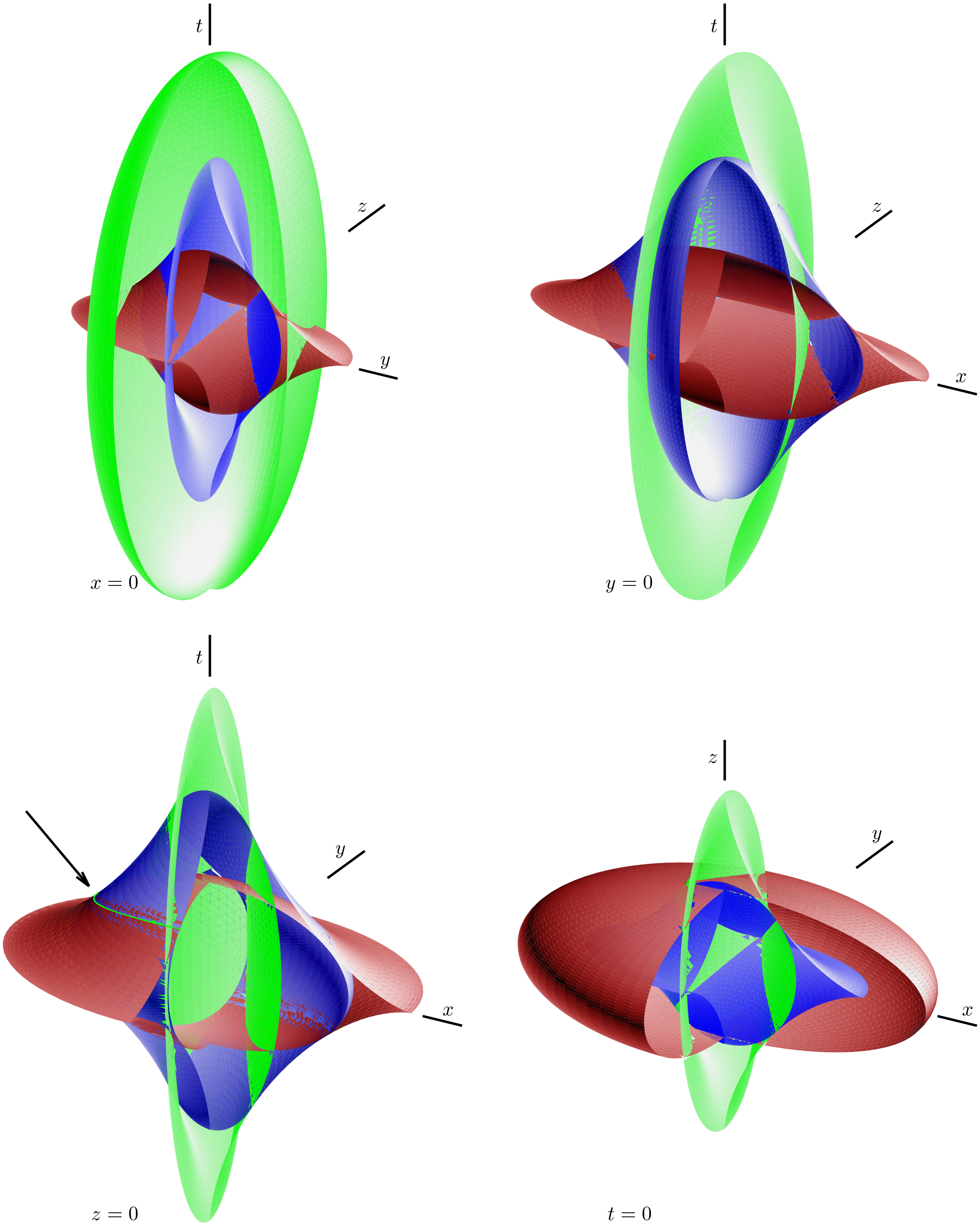

FIGURE 3. Coupes de la caustique de E^3 par les 4 hyperplans de symétrie indiqués. Un quart de chaque surface a été retiré pour une meilleure compréhension. Chaque feuillet est indiqué par une couleur. Chaque section contient un astroïde de Cayley et une sphère. Dans les sections par $y = 0$ et $z = 0$ l'astroïde et la sphère sont tangents le long de deux cercles d'ombilics dont un arc est tracé dans la section $z = 0$ (flèche). Paramètres de l'ellipsoïde: $a = 1,3$, $b = 1,2$, $c = 1,1$ et $d = 1$.

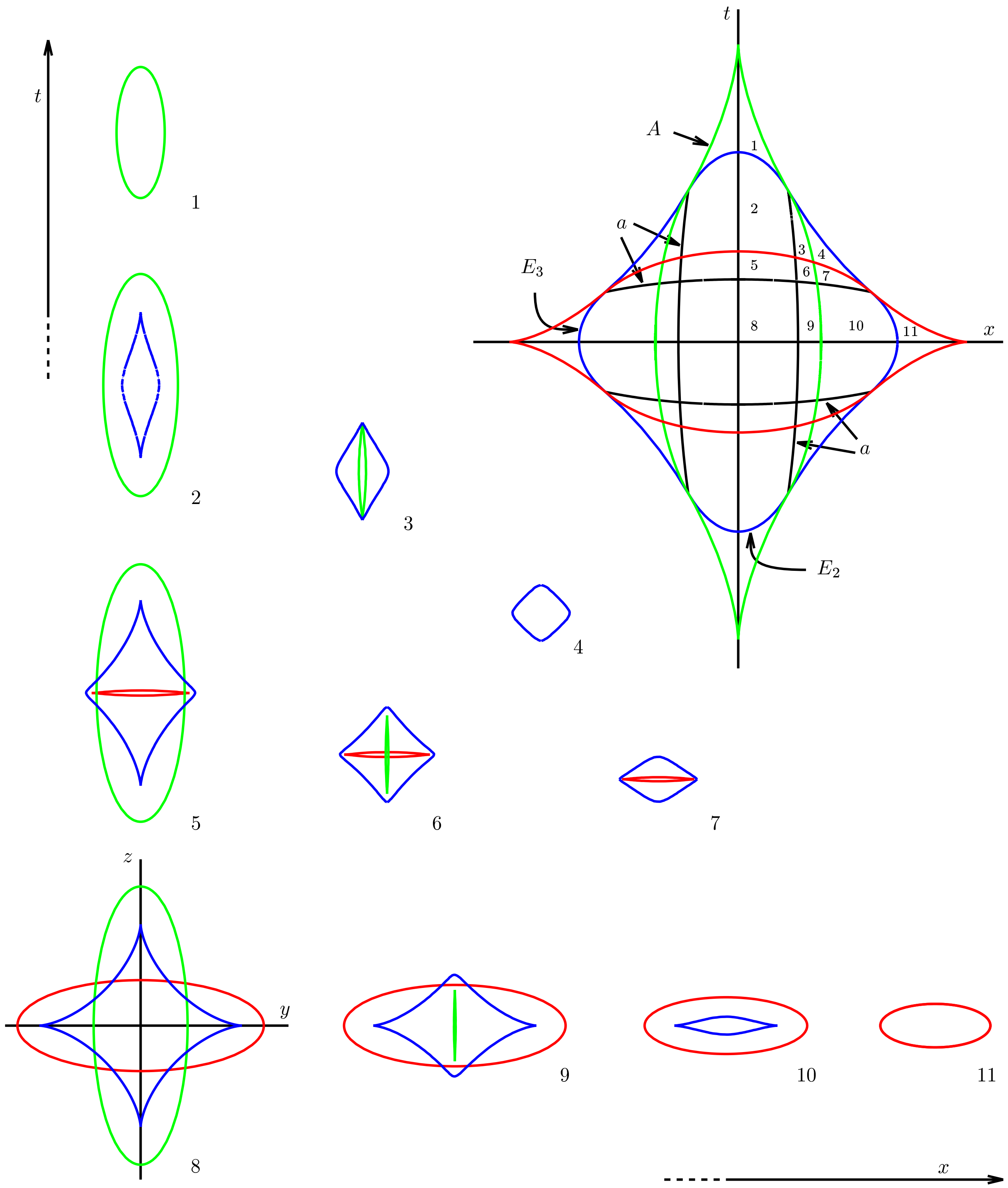

FIGURE 4. Coupes de la caustique de l'ellipsoïde E^3 par des plans $\{y,z\}$ situés à différentes valeurs de (x,t). 11 sections typiques ont été représentées. En faisant varier les paramètres x et t, on passe d'une coupe à l'autre par deux types de transition: disparition/apparition d'un feuillet (passage de 5 à 2) et passage par un ombilic hyperbolique (de 5 à 8). Le premier type de transformation définit dans le plan $\{x,t\}$ (coin supérieur droit) des lignes de transition formant un astroïde A et deux ellipses E_2 et E_3 (le feuillet est indiqué par une couleur, en accord avec la figure 3). Le second type de transformation définit les 4 arcs a. Mêmes paramètres de l'ellipsoïde que dans la figure 3.

[Garcia 1992] R. Garcia, “Lignes de courbure d’hypersurfaces immergées dans l’espace $\mathbb{R}^4$”, *An. Acad. Bras. Ciênc.* **64** (1992).

[Garcia 1993] R. A. Garcia, “Hyperbolic principal cycles on hypersurfaces of $\mathbb{R}^4$”, *Ann. Global Anal. Geom.* **11**:2 (1993), 185–196.

[Glaser et Grümm 1950] W. Glaser et H. Grümm, “Die Kaustikfläche der Elektronenlinsen”, *Optik* **7** (1950), 96–120.

[Joets et Ribotta 1995] A. Joets et R. Ribotta, “Structure of caustics studied using the global theory of singularities”, *Europhys. Letters* **29** (1995), 593–598.

[Joets et Ribotta 1996] A. Joets et R. Ribotta, “Experimental determination of a topological invariant in a pattern of optical singularities”, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 1755–1758.

[Leisegang 1953] S. Leisegang, “Zum Astigmatismus von Electronenlinsen”, *Optik* **10** (1953), 5–14.

[Porteous 1971] I. R. Porteous, “The normal singularities of a submanifold”, *J. Diff. Geom.* **5** (1971), 543–564.

[Poston et Stewart 1978] T. Poston et I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications*, Pitman, London, 1978. Reédité par Dover, Mineola, NY, 1996.

[Thom 1956] R. Thom, “Les singularités des applications différentiables”, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **6** (1956), 43–87.

Alain Joets, Laboratoire de Physique des Solides, Bât. 510, Université de Paris Sud, 91405 Orsay Cedex, France (joets@lps.u-psud.fr)

Roland Ribotta, Laboratoire de Physique des Solides, Bât. 510, Université de Paris Sud, 91405 Orsay Cedex, France (ribotta@lps.u-psud.fr)

Received December 9, 1997; accepted in revised form August 5, 1998