Construction d'une extension régulière de $\mathbb{Q}(T)$ de groupe de Galois M_{24}

Louis Granboulan

TABLE DES MATIÈRES

Matzat a prouvé que le groupe de Mathieu de degré 24 est groupe de Galois sur l'extension transcendante $\mathbb{Q}(T)$. Il utilise pour cela une construction dite *non rigide* et prouve l'existence d'un point rationnel dans un espace de Hurwitz adéquat. Nous donnons ici une telle extension explicitement. Nous en déduisons aussi l'existence d'une extension régulière de $\mathbb{K}(T)$ de groupe de Galois M_{23} pour tout $\mathbb{K}$ tel que l'équation $x^2+y^2+z^2=0$ ait une solution non triviale. Pour obtenir ces résultats, il a fallu remplacer les outils habituels du calcul formel par des constructions numériques et retrouver ensuite les objets algébriques en paramétrisant certaines courbes de genre 0. Cela nous permet d'illustrer la puissance des techniques de calcul de revêtements développées dans [Couveignes 1994; Couveignes et Granboulan 1994].

Matzat has proved that the Mathieu group of degree 24 is a Galois group over the transcendent extension $\mathbb{Q}(T)$. He does this by using a construction called *nonrigid*, proving the existence of a rational point in an appropriate Hurwitz space. Here we perform such a construction explicitly. We also deduce that, for any $\mathbb{K}$ such that the equation $x^2+y^2+z^2=0$ has a nontrivial solution, there is a regular extension of $\mathbb{K}(T)$ with Galois group M_{23}. To achieve this, we had to replace the usual tools of symbolic calculation by numerical constructions, and then to recover the algebraic objects by parametrizing certain curves of genus 0. This allows us to illustrate the power of covering map techniques developed in [Couveignes 1994; Couveignes et Granboulan 1994].

1. INTRODUCTION

Le groupe de Mathieu M_{23} est le seul groupe sporadique simple pour lequel on ignore si la propriété inverse de Galois est satisfaite [Serre 1992]. Quant au groupe M_{24}, Matzat [1989] a prouvé à partir de calculs dûs à F. Häfner l'existence d'une extension

1058-6458/96 \$0.50 per page

finie de $\mathbb{Q}(T)$, galoisienne et régulière, de groupe de Galois M_{24} et ramifiée au dessus de 4 points. (T est un paramètre formel transcendant sur $\mathbb{C}$.) Cependant, aucun modèle explicite n'avait été calculé jusqu'à ce jour. Or cette extension contient un corps de genre 0 et de degré 24 correspondant au groupe M_{23} vu comme le stabilisateur d'un point dans M_{24}. Un calcul explicite était nécessaire pour déterminer la classe d'isomorphisme sur $\mathbb{Q}$ de ce sous-corps. On trouve qu'il est associé à la conique d'équation $x^2+y^2+z^2=0$. On obtient alors une extension régulière de $\mathbb{K}(T)$ et de groupe de Galois M_{23} pour tout corps de nombres $\mathbb{K}$ tel que la conique ci-dessus ait des points $\mathbb{K}$-rationnels.

Dans la section suivante, nous exprimons les résultats de [Malle et Matzat 1993] selon la terminologie développée dans [Fried et Völklein 1991]. Les résultats de nos calculs sont présentés dans la troisième section, la preuve de leur validité est dans la quatrième section.

Conformément à [Todd 1970] nous faisons agir les permutations à droite. Ainsi le produit de $(1,2)$ et de $(2,3)$ est $(1,2)(2,3)=(1,3,2)$. Par souci de simplicité, on identifie $\mathbb{C}$ à un ouvert de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

2. PREUVE D'EXISTENCE

Dans cette section, nous présentons la preuve de Matzat de l'existence d'une extension régulière de $\mathbb{Q}(T)$ de groupe de Galois M_{24}.

On trouve dans [Todd 1970] une définition point trop ineffective du groupe de Mathieu M_{24} comme le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{24}$ engendré par les dix permutations suivantes:

$$A=(6,17)(8,20)(9,10)(11,15)(12,18)(13,23)(14,21)(22,24)$$
$$B=(6,12)(8,13)(9,14)(10,21)(11,24)(15,22)(17,18)(20,23)$$
$$C=(6,22)(8,10)(9,20)(11,18)(12,15)(13,21)(14,23)(17,24)$$
$$D=(6,10)(8,22)(9,17)(11,23)(12,21)(13,15)(14,18)(20,24)$$
$$T=(7,19,16)(8,20,17)(9,14,12)(10,11,23)(13,22,21)(15,18,24)$$
$$G=(5,6)(7,24)(8,20)(9,14)(10,23)(13,21)(15,16)(18,19)$$
$$H=(4,5)(8,20)(11,23)(12,14)(13,15)(16,19)(18,21)(22,24)$$
$$I=(3,4)(8,17)(9,12)(10,13)(11,21)(16,19)(18,24)(22,23)$$
$$J=(2,3)(7,19)(8,10)(9,14)(11,17)(13,21)(18,24)(20,23)$$
$$K=(1,2)(8,12)(9,17)(11,23)(14,20)(16,19)(18,24)(21,22)$$

Matzat et Malle remarquent que les classes $12B$ et $2A$ (selon les notations de l'Atlas des groupes finis [Conway et al. 1985, pp. 94–96]) sont rationnelles et que le quadruplet $(12B,2A,2A,2A)$ est non-rigide. Nous étudierons la famille de classes de conjugaison $(12B,2A,2A,2A)$.

Suivant les notations de [Serre 1992, p. 70], qui sont proches de celles de [Matzat 1993], on note $\bar{\Sigma}$ l'ensemble des quadruplets $(\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c,\sigma_d)\in(12B, 2A,2A,2A)$ tels que $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d=1$. On note Σ l'ensemble des $(\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c,\sigma_d)\in\bar{\Sigma}$ tels que $\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c,\sigma_d$ engendrent le groupe M_{24}.

Selon la formule dans [Serre 1992], on trouve:

$$|\bar{\Sigma}|=\frac{|M_{24}|^3}{|Z(12B)|\,|Z(2A)|^3}\sum_{\chi}\frac{\chi(12B)\chi(2A)^3}{\chi(1)^2}$$

Le tableau 1, extrait de l'Atlas, nous donne donc $|\bar{\Sigma}|=180\,|M_{24}|$.

M_{24} n'a pas de centre, l'action de $\mathrm{Inn}(M_{24})$ sur Σ est donc libre et on peut définir une relation d'équivalence sur les quadruplets de Σ et sur ceux de $\bar{\Sigma}$. On a donc $|\bar{\Sigma}/\mathrm{Inn}(M_{24})|=180$. Par ailleurs Matzat et Malle montrent que $|\Sigma/\mathrm{Inn}(M_{24})|=144$. Le groupe de tresses à quatre brins de Hurwitz H_4 agit transitivement sur ces 144 classes de quadruplets.

Comme M_{24} n'a pas de centre, on en déduit, en appliquant par exemple des résultats de Fried [Debès et Fried 1994, § 4, théorème 4.3] l'existence d'une famille de revêtements (famille de Hurwitz)

$$\mathcal{F}:\mathcal{T}\to\mathcal{H}\times\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$$

avec les définitions et propriétés suivantes:

- $\mathcal{F}$ est un morphisme fini de variétés quasi-projectives, définies sur $\mathbb{Q}$.
- $\mathcal{H}$ est irréductible et la fibre générique $\mathcal{F}^{-1}(h\times\mathbb{P}_1(\mathbb{C}))$ est irréductible. La restriction de $\mathcal{F}$ à cette fibre est un revêtement galoisien de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ de groupe de Galois M_{24}. On note ce revêtement $\mathcal{R}_h$.
- Soit $\mathcal{S}=\mathbb{P}_1(\mathbb{C})^4-\mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est la variété discriminant. Il existe un morphisme Ψ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{S}$, de degré 144, tel que pour h un point de $\mathcal{H}$, le revêtement $\mathcal{R}_h$ est ramifié au dessus de

classe	ordre de $Z(\cdot)$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_8	χ_{10}	χ_{11}	χ_{12}	χ_{13}	χ_{15}	χ_{16}	χ_{18}
$1A$	244823040	1	23	45	45	253	770	770	990	990	1035	1035	1771
$2A$	21504	1	7	-3	-3	13	-14	-14	-18	-18	-21	-21	-21
$12B$	12	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1

TABLEAU 1. Table partielle de caractères.

$\Psi(h) = (a, b, c, d)$. La ramification en a est dans la classe $12B$. Celles en b, c, d sont dans la classe $2A$.

- Un point h de $\mathcal{H}$ est défini sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ si et seulement si le revêtement associé $\mathcal{R}_h$ ainsi que tous ses automorphismes peuvent être définis sur $\mathbb{K}$.
- La variété $\mathcal{H}$ est birationnellement équivalente à $\mathcal{C} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, où $\mathcal{C}$ est obtenue par restriction du revêtement Ψ à la sous-variété $\mathcal{D}$ de dimension 1 de $\mathcal{S}$ formée de l'adhérence des points de la forme $(\infty, -1, 1, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dans le cas qui nous intéresse, le genre de $\mathcal{C}$ est 1. On le calcule grâce à la formule de Hurwitz en regardant l'action du groupe de tresses sur les 144 classes de quadruplets. Il est malaisé de prouver l'existence de points rationnels sur une courbe de genre 1, surtout quand on ne connaît ni son j-invariant ni sa classe d'isomorphismes !

Malle et Matzat [1993, théorème 6.8] remarquent que l'action naturelle de la permutation des second et troisième termes du quadruplet se relève en une action sur $\mathcal{H}$. Si l'on appelle σ l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ définie par

$$\sigma(a, b, c, d) = (a, c, b, d),$$

il existe un automorphisme de $\mathcal{H}$, défini sur $\mathbb{Q}$, tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\Psi"'] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

On considère alors la variété $\mathcal{H}^{(2,3)} = \mathcal{H}/\Sigma$ que l'on appelle espace de Hurwitz symétrisé en $(2, 3)$ et de même on note $\mathcal{S}^{(2,3)} = \mathcal{S}/\sigma$. Un point de $\mathcal{S}^{(2,3)}$ se note $(a, \{b, c\}, d)$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})^4$. On obtient alors un revêtement

$$\Psi^{(2,3)} : \mathcal{H}^{(2,3)} \to \mathcal{S}^{(2,3)}.$$

La restriction de ce revêtement à la sous-variété $\mathcal{D}^{(2,3)}$ de $\mathcal{S}^{(2,3)}$ formée de l'adhérence des points de la forme $(\infty, \{-1, 1\}, \lambda)$ donne un revêtement de $\mathcal{D}^{(2,3)}$ par une courbe $\mathcal{C}^{(2,3)}$, ramifié au dessus de trois points. La courbe $\mathcal{D}^{(2,3)}$ est isomorphe à $\mathbb{P}_1$ sur $\mathbb{Q}$. La courbe $\mathcal{C}^{(2,3)}$ est un quotient de degré 2 de $\mathcal{C}$. La monodromie de $\Psi^{(2,3)}$ est donnée par l'action de H_4 sur les quadruplets et on peut à nouveau calculer le genre de $\mathcal{C}^{(2,3)}$ par la formule de Hurwitz. Cette fois, le genre est 0 et on trouve même un diviseur rationnel de degré impair parmi les points de ramifications, ce qui prouve que $\mathcal{C}^{(2,3)}$ est elle aussi isomorphe sur $\mathbb{Q}$ à la droite $\mathbb{P}_1$ et en particulier qu'elle a une infinité de points rationnels. Ces points correspondent à des revêtements galoisiens de $\mathbb{P}_1$, de groupe de Galois M_{24}, définis sur $\mathbb{Q}$ ainsi que tous leurs automorphismes et ramifiés au dessus de quadruplets de la forme (a, b, c, d) avec a et d dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ et la paire $\{b, c\}$ définie sur $\mathbb{Q}$ (i.e., stable par action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$).

3. DESCRIPTION D'UN REVÊTEMENT

Dans cette section, nous nous attachons à obtenir une description explicite d'un revêtement $\mathcal{R}_h$ qui nous mènera à une extension explicite de $\mathbb{Q}(T)$ de groupe de Galois M_{24}.

Si $\mathcal{R}_h$ est un revêtement de la famille décrite plus haut, alors on peut le quotienter par le stabilisateur d'un point dans M_{24}. On obtient alors un revêtement de genre

$$\tfrac{1}{2}(2-2\cdot 24+2(12-1)+8(2-1)+8(2-1)+8(2-1)) = 0$$

et sans automorphismes car le centralisateur de M_{24} dans $\mathfrak{S}_{24}$ est trivial. En fait, M_{24} est autonormalisateur et n'a pas de centre.

Conformément à une gymnastique qui est désormais classique [Fried 1977; Matzat 1987], il nous suffit d'étudier ce revêtement de degré 24. On a en effet:

Théorème 3.1. *Soit $\{r_1, \dots, r_n\}$ un ensemble fini et rationnel de points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Si un revêtement χ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{r_1, \dots, r_n\}$, fini de degré d, connexe, sans automorphismes, admet un modèle défini sur $\mathbb{Q}$, et si le groupe de Galois G de ce revêtement est autonormalisateur dans $\mathfrak{S}_d$, alors sa clôture galoisienne admet un modèle défini sur $\mathbb{Q}$ ainsi que tous ses automorphismes.*

Démonstration. Appelons $\mathbb{M}$ l'extension maximale de $\mathbb{Q}(T)$ non ramifiée en dehors de $\{r_1, \dots, r_n\}$ et soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ une extension géométrique de $\mathbb{Q}(T)$ (non galoisienne) associée à un modèle rationnel du revêtement χ. On note $\mathbb{L}$ la clôture galoisienne de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{M}$. On appelle G le groupe de Galois géométrique de $\mathbb{L} \otimes \bar{\mathbb{Q}}/\bar{\mathbb{Q}}(T)$ et H le stabilisateur de $\mathbb{K} \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ dans G. Puisque le revêtement χ n'a pas d'automorphismes, le normalisateur de H dans G est H. Puisque $\mathbb{K}$ est défini sur $\mathbb{Q}$, tout élément σ de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ stabilise $\mathbb{K}$ et donc l'automorphisme de G induit par σ stabilise H. En appliquant le lemme 3.2 qui suit, on en déduit que l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur G est intérieure et l'on peut alors invoquer la descente de Weil. □

Lemme 3.2 (du stabilisateur stabilisé). Soit G est un groupe de permutations transitif de degré d et H le stabilisateur d'un point. Si H est égal à son normalisateur dans G, alors tout automorphisme de G qui stabilise H provient de l'action de $\mathfrak{S}_d$ sur G par conjugaison.

Démonstration. Soit σ un automorphisme de G qui stabilise H. Appelons H_i le stabilisateur de i pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. On a par exemple $H_1 = H$ et tous les H_i sont conjugués. Ainsi, σ induit une permutation des H_i que l'on représente par $\Sigma \in \mathfrak{S}_d$ telle que ${}^{\sigma}H_i = H_{\Sigma(i)}$. Pour toute permutation p de G et pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2$ les conditions $p(i) = j$ et ${}^{p}H_j = H_i$ sont équivalentes. En faisant agir σ sur cette dernière identité on trouve que $\sigma(p) = {}^{\Sigma^{-1}}p$. □

Ainsi, il nous suffit d'exhiber un modèle rationnel pour un revêtement de genre 0, de degré 24 et de groupe de Galois M_{24}. Ce revêtement se présentera sous la forme d'une conique définie sur $\mathbb{Q}$ et d'une application rationnelle sur cette conique. On ne se préoccupe pas tout de suite de la classe d'isomorphisme de courbes de genre 0 associée à ce revêtement. On le cherche d'abord sous la forme d'une fonction rationnelle de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. On n'attend pas d'une telle fonction qu'elle soit définie sur $\mathbb{Q}$, mais du moins sur une extension au plus quadratique de $\mathbb{Q}$. En effet, toute courbe définie sur $\mathbb{Q}$ de genre 0 est isomorphe à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur un corps quadratique. Quitte à composer à gauche cette fonction par une homographie rationnelle, on peut supposer qu'elle est ramifiée au dessus de $(a, b, c, d) = (\infty, b, c, 0)$ avec $\{b, c\}$ rationnelle. De même, en composant à droite par une homographie, on peut faire en sorte que les deux points au dessus de ∞ correspondant aux deux cycles de la classe $12B$ soient 0 et ∞. Étant donnés les types des permutations $(\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d)$, la fonction rationnelle recherchée est de la forme $X \mapsto \varphi(X) = N(X)/X^{12}$, où N est un polynôme de degré 24 qui se factorise en $N(X) = P_0(X)^2 Q_0(X)$ avec P_0 et Q_0 polynômes de degré 8. De même, il existe des polynômes P_b, Q_b, P_c, Q_c tous de degré 8 tels que

$$\begin{aligned} N(X) &= P_b(X)^2 Q_b(X) + bX^{12} \\ &= P_c(X)^2 Q_c(X) + cX^{12}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On pourrait essayer de trouver une telle fonction à l'aide d'un système de calcul formel en choisissant comme inconnues les coefficients des P et des Q ainsi que b et c. C'est bien évidemment sans espoir, la solution étant un idéal de dimension 2 et de degré 144 à cause de la grave non rigidité du vecteur $(12B, 2A, 2A, 2A)$.

La méthode que nous utilisons est numérique. On observe d'abord que les points singuliers de l'application Ψ correspondent à des revêtements dégénérés ramifiés au dessus de trois points seulement. Étant donnée la monodromie $(\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d)$ d'un revêtement non dégénéré de la famille, on obtient un revêtement dégénéré en «collant» deux ramifications pour obtenir par exemple le triplet $(\sigma_a,\ \sigma_t = \sigma_b\sigma_c,\ \sigma_d)$. Cela se justifie visuellement si on observe les dessins correspondants: on trace l'image réciproque d'une courbe passant par les quatre valeurs de ramification d'un revêtement régulier φ. Ce dessin permet de voir la monodromie du revêtement. Lorsqu'on rapproche l'une de l'autre les ramifications au dessus de b et de c, jusqu'à les confondre en t, l'action sur les drapeaux autour de t est $\sigma_b\sigma_c$. L'étude théorique de ce phénomène, dans un cadre plus général, a été faite dans [Matzat 1993].

Il se trouve que certains de ces revêtements «limites» sont si simples qu'on peut les calculer à la main. L'un d'eux correspond au dessin de la figure 1. Il est défini par la fonction rationnelle $X \overset{\tilde\varphi}{\mapsto} \tilde N(X)/X^{12}$ où

$$\tilde N(X) = \tilde P_0(X)^2 \tilde Q_0(X)^2 = \tilde P_t(X)^3 + 27X^{12}$$

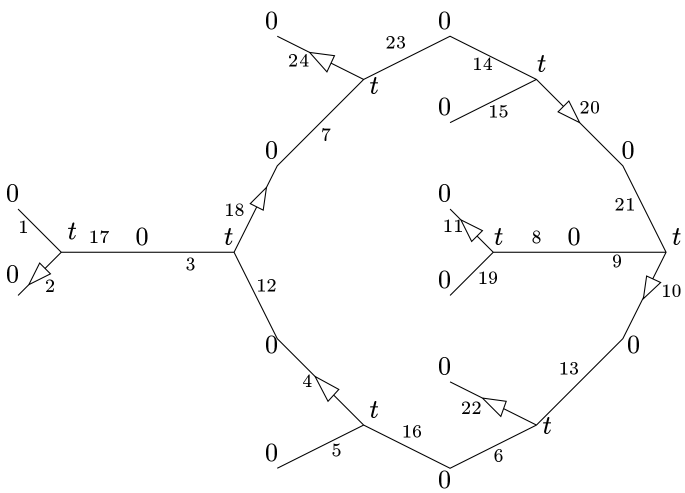


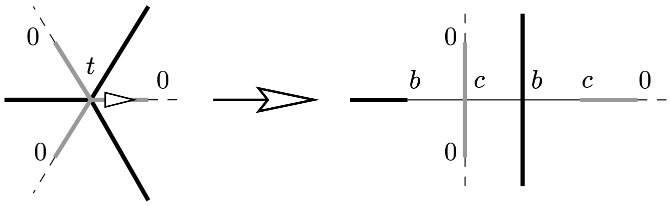
FIGURE 1. Dessin de $\tilde\varphi^{-1}([0,t])$ pour un revêtement dégénéré, avec flèches indiquant la direction d'éclatement des singularités.

avec

$$\tilde P_0(X) = (X^4 + X^3 - \tfrac12 X + \tfrac14)(X^2 + 2X - \tfrac12)(X^2 + \tfrac12),$$
$$\tilde Q_0(X) = X^8 + 6X^7 + 11X^6 + 9X^5 + {} + \tfrac{15}{2}X^4 - \tfrac92 X^3 + \tfrac{11}{4}X^2 - \tfrac34 X + \tfrac{1}{16},$$
$$\tilde P_t(X) = X^8 + 4X^7 + 4X^6 + 2X^5 + {} + \tfrac12 X^4 - X^3 + X^2 - \tfrac12 X + \tfrac{1}{16}.$$

Ensuite, on les déforme numériquement pour obtenir, par éclatement des singularités, un revêtement générique correspondant à un point régulier de Ψ. Il est alors très facile de déformer ce dernier revêtement pour obtenir, toujours numériquement, n'importe quel revêtement dans la famille de Hurwitz.

L'éclatement de chaque singularité se fait comme sur la figure ci-dessous:



Les positions des flèches sur la figure 1 se déduisent facilement de l'égalité $\sigma_t = \sigma_b\sigma_c$.

Après avoir obtenu suffisamment de valeurs numériques décrivant des revêtements de la famille de Hurwitz, il est possible, quoique non trivial, de deviner un point rationnel dans $\mathcal{H}$. Pour cela, on cherche une paramétrisation de $\mathcal{H}$ puis on choisit une valeur rationnelle du paramètre. On se déplace alors vers ce point en calculant le revêtement grâce aux techniques de déformation numérique décrites plus haut.

On obtient alors le revêtement défini par les valeurs de b, c, P_0, Q_0, P_bP_c, Q_bQ_c donnés dans la page suivante.

4. PREUVE DE LA VALIDITÉ DES CALCULS

Dans cette section, nous montrons d'abord que le revêtement calculé dans la section précédente et illustré par les figures 2 et 3 ci-après vérifie toutes

$$\left.\begin{aligned} b &= g - h\sqrt{13/23} \\ c &= g + h\sqrt{13/23} \end{aligned}\right\} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} g &= -23^{12}(23 \cdot 176732341 \cdot 3160016746668571006373927243119026548599 1)/(2^2 3^3) \\ h &= 23^{12}(2^2 13^2 89^2 1031^3 57768053971^3) \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} P_0 = {} & (37914193680139158016 - 30212873088860891544 0i)x^8 + (-487089564184489188256 - 96463506862623248038 4i)x^7 \\ & + (-705518709585926380450 - 569348221330342289928i)x^6 + (-665599278593112042824 - 297286720202456418804i)x^5 \\ & - 1658222119279762910881/3x^4 + (665599278593112042824 - 297286720202456418804i)x^3 \\ & + (-705518709585926380450 + 569348221330342289928i)x^2 + (487089564184489188256 - 964635068626232480384i)x \\ & + (37914193680139158016 + 30212873088860891544 0i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0 = {} & (-295056701084944826384 + 752382831784862668 80i)x^8 + (-1109162598452524669696 + 1743525953573752091776i)x^7 \\ & + (1320581620414055144000 + 4075299488337154160172i)x^6 + (4884408960401791122256 + 2036269774848408573216i)x^5 \\ & + 8467136311096387941637 1/12x^4 + (-4884408960401791122256 + 2036269774848408573216i)x^3 \\ & + (1320581620414055144000 - 4075299488337154160172i)x^2 + (1109162598452524669696 + 1743525953573752091776i)x \\ & + (-295056701084944826384 - 752382831784862668 80i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_b(x)P_c(x) = {} & (3579677256014175175166862235272669427 20 - 4492144007547200219817238883479428300 8i)x^{16} \\ & + (22351165834532969560166882870007950704 64 - 24302348646137523722247550444905007413 76i)x^{15} \\ & + (14937709615908958973497742606162600371 2 - 11290702718566151589167319244788699428 640i)x^{14} \\ & + (-13820453300845488466791143803490890981600 - 15319753001105493958806923394239564713280i)x^{13} \\ & + (-26933069196708829089178196131144865076500 - 47025465156024351583023945660262899384 32i)x^{12} \\ & + (-21430541752671632771288988599268601728384 + 85029651581117490557382333254122133161 56i)x^{11} \\ & + (-39650399017292766224983103548104264625 08 + 96624494831199626358318822224516440634 35/2i)x^{10} \\ & + (92785366023641983512267612718236303312 1/2 + 43377603452203253664655247644824784473 27i)x^9 \\ & - 69326366502826336942233805196756761980 0x^8 \\ & + (-92785366023641983512267612718236303312 1/2 + 43377603452203253664655247644824784473 27i)x^7 \\ & + (-39650399017292766224983103548104264625 08 - 96624494831199626358318822224516440634 35/2i)x^6 \\ & + (21430541752671632771288988599268601728384 + 85029651581117490557382333254122133161 56i)x^5 \\ & + (-26933069196708829089178196131144865076500 + 47025465156024351583023945660262899384 32i)x^4 \\ & + (13820453300845488466791143803490890981600 - 15319753001105493958806923394239564713280i)x^3 \\ & + (14937709615908958973497742606162600371 2 + 11290702718566151589167319244788699428 640i)x^2 \\ & + (-22351165834532969560166882870007950704 64 - 24302348646137523722247550444905007413 76i)x \\ & + (3579677256014175175166862235272669427 20 + 4492144007547200219817238883479428300 8i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_b(x)Q_c(x) = {} & (593412511034581132294521331680209736327823385 6 + 1513178259727873639325414936176157075181649920i)x^{16} \\ & + (538242666527047401995806568283923469609076326 40 - 2039386404234264977309227783016923613529065728 0i)x^{15} \\ & + (120609228422728549381241680324239993130448098560 - 1654361776203076285964833368372139335226180759 68i)x^{14} \\ & + (469504469949583436390378161318198328279317605 12 - 4028587252961332911941937598144629591102171982 08i)x^{13} \\ & + (-213496964142166002356868949404200399503809864740 - 625332451177901202505615158295134616229378414720i)x^{12} \\ & + (-524214922042127468175247771548228365614875714672 - 653645622735496187583547193364930345423124263288i)x^{11} \\ & + (-350135251185023176677387479207555542294634800220 - 431751360750861966660635405726734101618880087024i)x^{10} \\ & + (-324269419013943757960326867935156652748817931600 - 920138358480190067942927754871256363930728527 60i)x^9 \\ & + 234903732196633106010673506780481150431809056880x^8 \\ & + (324269419013943757960326867935156652748817931600 - 920138358480190067942927754871256363930728527 60i)x^7 \\ & + (-350135251185023176677387479207555542294634800220 + 431751360750861966660635405726734101618880087024i)x^6 \\ & + (524214922042127468175247771548228365614875714672 - 653645622735496187583547193364930345423124263288i)x^5 \\ & + (-213496964142166002356868949404200399503809864740 + 625332451177901202505615158295134616229378414720i)x^4 \\ & + (-469504469949583436390378161318198328279317605 12 - 4028587252961332911941937598144629591102171982 08i)x^3 \\ & + (120609228422728549381241680324239993130448098560 + 1654361776203076285964833368372139335226180759 68i)x^2 \\ & + (-538242666527047401995806568283923469609076326 40 - 2039386404234264977309227783016923613529065728 0i)x \\ & + (593412511034581132294521331680209736327823385 6 - 1513178259727873639325414936176157075181649920i) \end{aligned}$$

Valeurs de b, c, P_0, Q_0, P_bP_c, Q_bQ_c qui définissent le revêtement cerché.

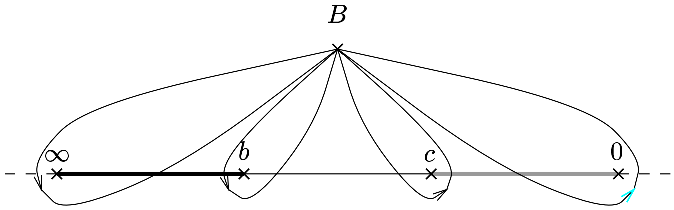
les propriétés demandées. Ce doit être un revêtement non ramifié hors de $\{\infty, b, c, 0\}$, de groupe de Galois M_{24} et de type $(12B, 2A, 2A, 2A)$. Nous réglons ensuite les problèmes liés à la descente sur $\mathbb{Q}$.

Les valeurs calculées pour P_0, Q_0, P_b, Q_b, P_c, Q_c vérifient la formule (3.1). On remarque que d'après (3.1) et la formule de Hurwitz, l'application φ ne peut être ramifiée en dehors de $\{\infty, b, c, 0\}$.

Pour calculer la monodromie de φ on choisit la base du groupe fondamental

$$\pi_1(B, \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{\infty, b, c, 0\})$$

représentée ci-dessous, où B est un point du demi-plan supérieur.



L'image réciproque de $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = {P_0}^2 Q_0 / x^{12}$ est le graphe des figures 2 et 3, tracé sur la sphère. Les traits noirs gras figurent les composantes connexes de la préimage du segment (∞, b). De même, on utilise des lignes minces pour le segment (b, c), des lignes grises pour le segment $(c, 0)$ et des lignes pointillées pour le segment $(0, \infty)$. Les composantes connexes de la préimage du demi-plan supérieur (drapeaux) sont marquées d'un nombre entre 1 et 24. La monodromie se calcule en chaque point de ramification en tournant dans le sens positif.

On trouve que la monodromie – en tant qu'action sur les drapeaux – est donnée par les quatre permutations données sur le tableau 2.

Proposition 4.1. $\sigma_\infty, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_0$ sont éléments de M_{24}. Ces permutations engendrent le groupe.

Démonstration. Il s'agit d'exprimer ces permutations en fonction des générateurs exhibés dans [Todd 1970] et rappelés dans la section 2 ci-dessus. On construit une famille fortement génératrice (*strong generating set*) de M_{24} en utilisant l'algorithme de Sims Schreier avec Magma, ce qui nous donne l'ensemble $\{A, B, C, D, T, G, H, I, J, K, l, m, n, o, p, q\}$ où:

$$\begin{aligned} l &= m^H, \\ m &= n^I, \\ n &= (o^J T)^{-1}, \\ o &= p^K, \\ p &= T(CA)^{GHIJK}, \\ q &= K^{JIHGDW} \text{ avec } W = BJ^{IHGD(CG)^{T^{-1}}}. \end{aligned}$$

On exprime en fonction des éléments de la base ci-dessus les quatre permutations engendrant la monodromie, ce qui nous prouve que $\sigma_\infty, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_0 \in M_{24}$:

$$\begin{aligned} \sigma_\infty &= Do^{-1}qTo^{-1}ql^{-1}m^{-1}n^{-1}o^{-1}p^{-1}, \\ \sigma_b &= mK, \\ \sigma_c &= DCBqT^{-1}Iql^{-1}Io^{-1}qn^{-1}o^{-1}qop, \\ \sigma_0 &= GCBT^{-1}nqlnqm^{-1}nqno^{-1}p. \end{aligned}$$

De façon similaire, on exprime $A, B, C, D, T, G, H, I, J, K$ en fonction de $\sigma_\infty, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_0$. ☐

Proposition 4.2. On a $\sigma_\infty \in 12B$ et $\sigma_b, \sigma_c, \sigma_0 \in 2A$.

Démonstration. Nous remarquons que l'ordre d'une permutation détermine l'ordre de la classe de conjugaison. Il y a deux classes d'ordre 2 et deux classes d'ordre 12, qui peuvent être différenciées à l'aide de leur décomposition en cycles:

$$(1)^8(2)^8 \text{ pour } 2A, \qquad (2)^{12} \text{ pour } 2B,$$
$$(2)(4)(6)(12) \text{ pour } 12A, \qquad (12)^2 \text{ pour } 12B. \quad ☐$$

$$\begin{aligned} \sigma_\infty &= (1,17,18,24,23,20,10,6,5,4,3,2)(7,12,16,22,13,9,19,11,8,21,15,14) \\ \sigma_b &= (1,2)(4,16)(8,11)(9,10)(12,18)(13,22)(15,20)(23,24) \\ \sigma_c &= (1,17)(3,12)(5,16)(6,13)(7,23)(8,19)(9,21)(14,15) \\ \sigma_0 &= (3,17)(4,12)(6,16)(7,18)(8,9)(10,13)(14,23)(20,21) \end{aligned}$$

TABLEAU 2. Monodromie des courbes de la figure ci-après.

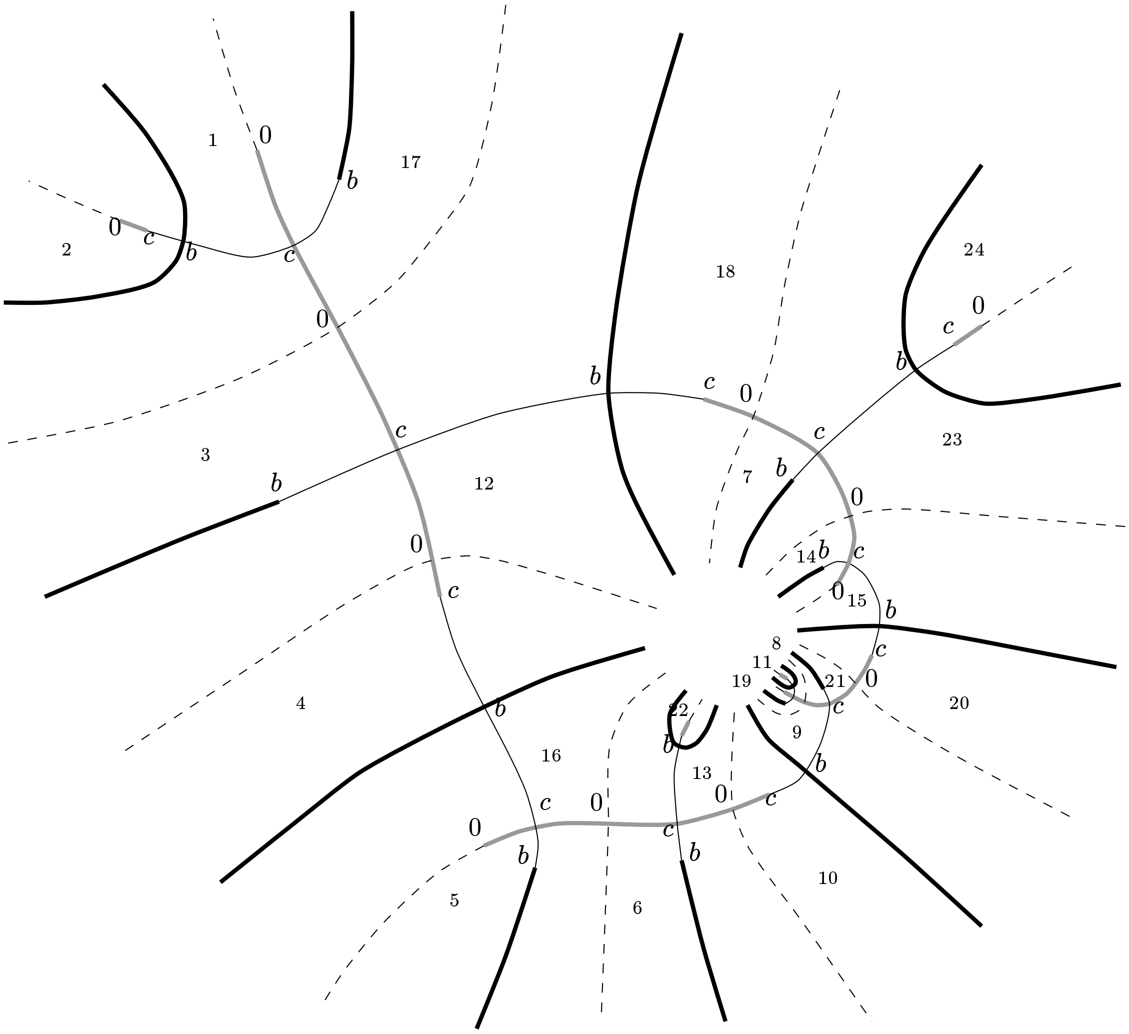


FIGURE 2. Préimage $\varphi^{-1}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)$. Lignes noires grasses: composantes connexes de $\varphi^{-1}((\infty, b))$. Lignes minces: $\varphi^{-1}((b,c))$. Lignes grises: $\varphi^{-1}((c,0))$. Lignes pointillées: $\varphi^{-1}((0,\infty))$.

Les deux propositions ci-dessus nous montrent que pour $\mathbb{L} = \mathbb{C}(x,T)/(\varphi(x) - T)$, l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{C}(T)$ est de groupe de Galois géométrique M_{24}.

Remarque. Pour calculer rigoureusement la monodromie d'un revêtement donné par un modèle algébrique (sans recourir à un *dessin*) on peut utiliser les méthodes données par Leila Schneps [1994]. Ces méthodes reposent sur des majorations de la dérivée qui rendent rigoureuse l'idée de *tourner* autour des points de ramification.

Il reste à voir que l'application φ ci-dessus conduit bien à une extension régulière de $\mathbb{Q}(T)$. C'est la descente de Weil. On observe tout d'abord que φ n'est pas définie sur $\mathbb{Q}$ mais que néanmoins la conjuguée $\bar{\varphi}$ de φ définit un revêtement isomorphe. En effet,

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi\Big(-\frac{1}{x}\Big).$$

On va donc considérer la courbe $\mathcal{E}$ d'équation

$$\Gamma(u,v) = u^2 + v^2 + 1 = 0$$

et le morphisme $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ défini par $\varphi(u,v) = \varphi(u + iv)$, défini sur $\mathbb{Q}$ et isomorphe sur $\mathbb{C}$ à φ.

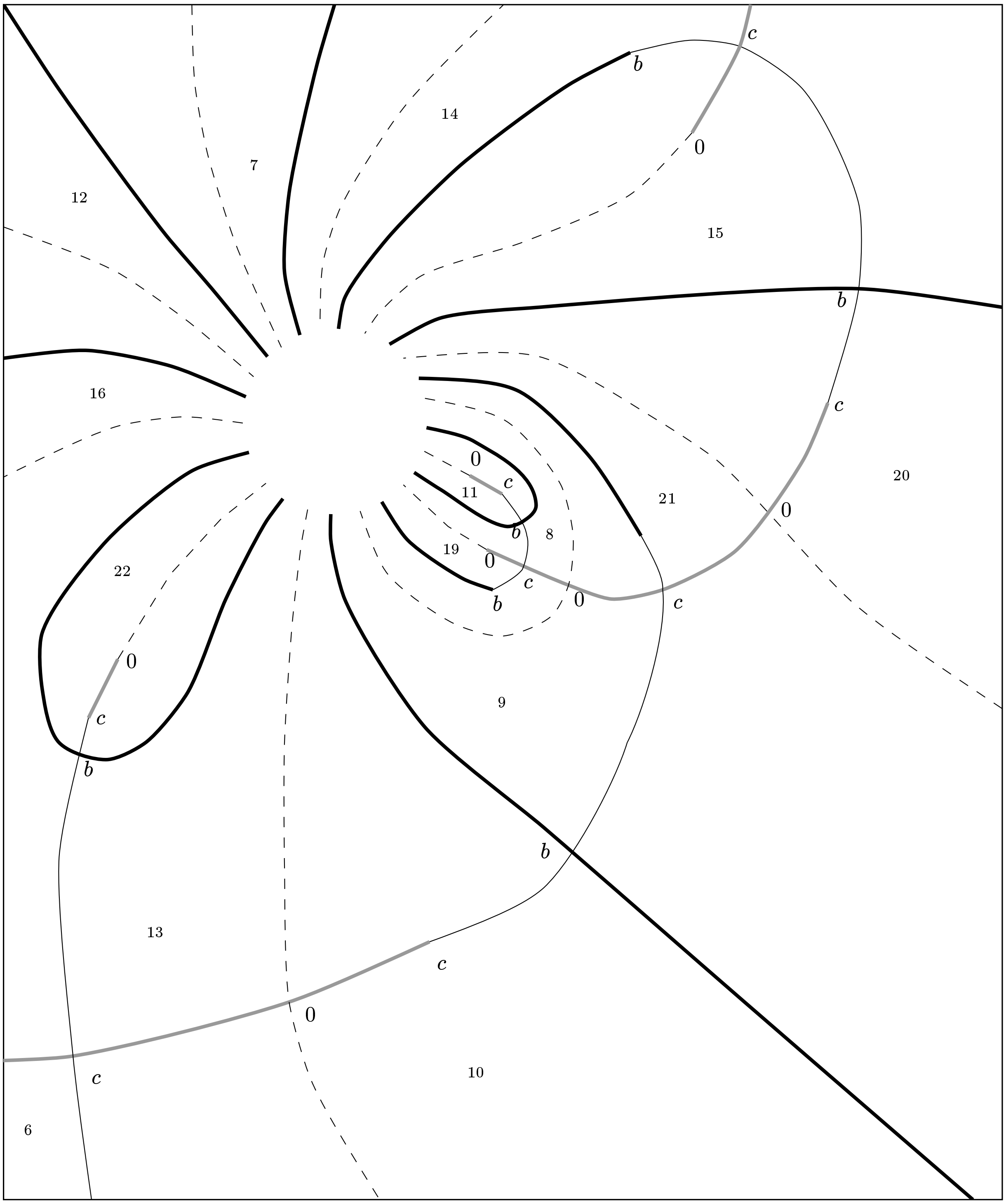


FIGURE 3. Agrandissement de la figure précédente.

Pratiquement, on écrit $x = u + iv$ et on calcule $\varphi(u + iv) \bmod \Gamma$. On pose

$$\begin{aligned} p_0(u,v) &= \frac{P_0}{x^4}(u+iv) \bmod (u^2+v^2+1) \\ &= (4834059694217742647040u^3 + 7717080549009859843072u^2 + 4694422732430240483232u + 2523843577657377798376)v \\ &\quad + 6066270988822265282\,56u^4 - 389671651347591350604 8u^3 - 2215447739461478993544u^2 - 4253735942293159215184u \\ &\quad - 5663849214714486245485/3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_0(u,v) &= \frac{Q_0}{x^4}(u+iv) \bmod (u^2+v^2+1) \\ &= (-1203812530855780270080u^3 - 1394820762859001673420 8u^2 - 1690310421877650677572 8u - 7559591456844321329984)v \\ &\quad - 4720907217359117222144u^4 - 8873300787620197357568u^3 + 5614192642971033538 56u^2 + 3113842330088434226336u \\ &\quad + 10928396117486252703915 5/12. \end{aligned}$$

Notre revêtement est entièrement défini par les huit lignes ci-dessus. Plus précisément, φ est donnée comme l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{P}_1$ définie par

$$\varphi(u,v) = p_0(u,v)^2 q_0(u,v),$$

et elle vérifie $\varphi = p_b(u,v)^2 q_b(u,v) + b = p_c(u,v)^2 q_c(u,v) + c$, avec

$$\begin{aligned} p_b(u,v)p_c(u,v) &= \frac{P_bP_c}{x^8}(u+iv) \bmod (u^2+v^2+1) \\ &= (114998886593208325627321315417073364500 48u^7 + 311070062670560303644768645694784094896128u^6 \\ &\quad + 739854806977214950550806628979037768108032u^5 + 879069674373576186237782355734146189445120u^4 \\ &\quad + 805033148649948184591254326936464487729152u^3 + 416301624263097976432248536993995882175520u^2 \\ &\quad + 154502648822580927099933981242128133052394u + 981852472477434381765584069767074738234 6)v \\ &\quad + 916397377539628844842716732229803373363 20u^8 + 286094922682022010370136100736101769019392u^7 \\ &\quad + 192839609662107502711581901713904738910208u^6 + 584116090664828872104215745764695843727 36u^5 \\ &\quad - 302039233723615059206953713667676323197248u^4 - 473929408708423341768088572789695405199104u^3 \\ &\quad - 418501756854040425565317273873595926606320u^2 - 234568297695902104076289057485327026166687u \\ &\quad - 614747922183834605782720237247003648049 52 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_b(u,v)q_c(u,v) &= \frac{Q_bQ_c}{x^8}(u+iv) \bmod (u^2+v^2+1) \\ &= (-3873736344903356516673062236610962112465023795 20u^7 + 261041459741985917095581156226166222531720413184 0u^6 \\ &\quad + 1000685491596418475267397422209004742857780329267 2u^5 + 161544974562510892819089647668898924731734555074 56u^4 \\ &\quad + 2035112606498964768797270970051566047308854751027 2u^3 + 158766798630236156784374571183146771165241584127 36u^2 \\ &\quad + 869068833171470305161605629233576202537905817875 2u + 233782409584398227069025201299337635412340994307 2)v \\ &\quad + 151913602824852769867397460910133692499922786713 6u^8 + 688950613154620674554632407403422041099617697792 0u^7 \\ &\quad + 107572626755516825577474167589540334103471340421 12u^6 + 135590500340445288011552772457781203697371260477 44u^5 \\ &\quad + 100614545376179443262317663820365041047110944598 40u^4 + 371261636856424490251256403766690924781991955878 4u^3 \\ &\quad - 947762007343890420262589633494545772935585217 76u^2 - 257078416719320252578763300824399231345486568915 2u \\ &\quad - 639273991391596530649465563160946552177627608208. \end{aligned}$$

En écrivant $T = \varphi(u, v) = A(u) + vB(u) \bmod \Gamma$, on exprime $v = (T - A(u))/B(u)$ dans Γ:

$$u^2 + \left(\frac{T - A(u)}{B(u)}\right)^2 + 1.$$

Cela nous donne le polynôme minimal de u sur $\mathbb{Q}(T)$, $P(u)$ de degré 24 en u et de groupe de Galois géométrique M_{24}:

$$P(u) = (1 + u^2)B(u)^2 + (T - A(u))^2.$$

Voyons maintenant ce que nous pouvons en déduire pour M_{23}. Posons $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(T)[u]/P(u)$ et $\bar{\mathbb{L}}$ une clôture galoisienne de $\mathbb{L}/\mathbb{Q}(T)$. Le théorème 3.1 nous permet d'affirmer que $\bar{\mathbb{L}}$ est une extension régulière de $\mathbb{Q}(T)$. Le corps de fonctions $\mathbb{L}$ est associé à la courbe $\mathcal{E}$ et $\bar{\mathbb{L}}$ à une courbe $\bar{\mathcal{E}}$. On a la tour d'extensions et la tour de revêtements associée:

$$M_{24}\left\{\begin{tikzcd} \bar{\mathbb{L}} \arrow[d, dash, "M_{23}"'] & \bar{\mathcal{E}} \arrow[d] \\ \mathbb{L} \arrow[d, dash] & \mathcal{E} \arrow[d, "P"'] \\ \mathbb{Q}(T) & \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \end{tikzcd}\right.$$

Le revêtement $\bar{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ est galoisien de groupe de Galois M_{23}. Il nous permet d'obtenir une extension régulière de $\mathbb{K}(T)$ de groupe de Galois M_{23} pour tout corps de nombre $\mathbb{K}$ tel que la courbe $\mathcal{E}$ de genre 0 ait des points $\mathbb{K}$-rationnels.

REMERCIEMENTS

Nous remercions G. Malle et R. Dentzer pour nous avoir suggéré ce problème. Nous remercions tout particulièrement J.-M. Couveignes pour ses suggestions et son aide dans la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[Conway et al. 1985] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker et R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Oxford University Press, Oxford, 1985.

[Couveignes 1994] Jean-Marc Couveignes, "Calcul et rationalité de fonctions de Belyĭ en genre 0", *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **44** (1994), 1–38.

[Couveignes et Granboulan 1994] J.-M. Couveignes et L. Granboulan, "Dessins from a geometric point of view", pp. 79–113 dans *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*: voir [Schneps 1994].

[Debès et Fried 1994] P. Debès et M. D. Fried, "Nonrigid construction in Galois theory", *Pacific J. Math.* **163** (1994), 81–122.

[Fried 1977] M. D. Fried, "Fields of definition of function fields and Hurwitz families: Groups as Galois groups", *Comm. Algebra* **5** (1977), 17–82.

[Fried et Völklein 1991] M. D. Fried et H. Völklein, "The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces", *Mathematische Annalen* **290** (1991), 771–800.

[Matzat 1987] B. Heinrich Matzat, *Konstruktive Galoistheorie*, Lecture Notes in Math. **1284**, Springer, Berlin, 1987.

[Matzat 1989] B. Heinrich Matzat, "Rationality criteria for Galois extensions", pp. 361–383 in *Galois Groups over* $\mathbb{Q}$ (édité par Y. Ihara et al.), MSRI Publications **16**, Springer, New York, 1989.

[Matzat 1993] B. Heinrich Matzat, "Braids and Decomposition Groups", pp. 179–189 in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris*, 1991–92 (édité by S. David), Progress in Math. **116**, Birkhäuser, Boston, 1993.

[Malle et Matzat 1993] G. Malle et B. Heinrich Matzat, "Action of braids", chapitre 3 dans *Inverse Galois Theory*, preprint, University of Heidelberg, 1993.

[Schneps 1994] Leila Schneps, "Dessins d'enfants on the Riemann sphere", pp. 47–77 dans *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, Luminy, 1993 (édité par Leila Schneps), London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **200**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Serre 1992] Jean-Pierre Serre, *Topics in Galois Theory* (notes écrites par Henri Da[r]mon), Research Notes Math. **1**, Jones and Bartlett, Boston, 1992.

[Todd 1970] J. A. Todd, "Abstract definitions for the Mathieu groups", *Quart. J. Math. Oxford* **21** (1970), 421–424.

Louis Granboulan, Laboratoire d'Informatique, URA 1327 CNRS, DMI, École Normale Supérieure (Louis.Granboulan@ens.fr)

Received November 16, 1994; accepted in revised form November 4, 1995