Fonction sommatoire de la fonction de Möbius 2. Majorations asymptotiques élémentaires

François Dress et Mohamed El Marraki

TABLE DES MATIÈRES

On établit la majoration « intermédiaire » $\bigl|M(x)\bigr| \le \frac{1}{2360}x$, valable pour x appartenant à l'intervalle $\bigl[10^{12},\ 2.2959\,10^{16}\bigr]$, et d'autres majorations analogues. On établit ensuite la majoration asymptotique $\bigl|M(x)\bigr| \le \frac{1}{2360}x$, valable pour tout $x \ge 617\,973$.

We establish the "intermediary" bound $\bigl|M(x)\bigr| \le \frac{1}{2360}x$, valid for x in the interval $\bigl[10^{12},\ 2.2959\,10^{16}\bigr]$, and other similar upper bounds. Lastly, we establish the asymptotic upper bound $\bigl|M(x)\bigr| \le \frac{1}{2360}x$, valid for every $x \ge 617\,973$.

1. INTRODUCTION

On rappelle les notations classiques : μ est la fonction de Möbius, M la fonction sommatoire de μ, et Q la fonction sommatoire de $|\mu|$.

Après l'article [Dress 1993], dont le résultat essentiel est la majoration

$$\bigl|M(x)\bigr| \le 0.570591\,\sqrt{x} \quad \text{pour } 33 \le x \le 10^{12}, \tag{1.1}$$

cet article est consacré aux majorations élémentaires du type $\bigl|M(x)\bigr| \le \varepsilon x$.

On peut se demander quel est l'intérêt d'obtenir des majorations du type $\bigl|M(x)\bigr| \le \varepsilon x$ avec ε « petit » alors que l'on sait que $M(x) = o(x)$, propriété équivalente au théorème des nombres premiers. La réponse est que, contrairement au cas de $\pi(x)$, il n'existe pas de majorations effectives de $M(x)$ qui soient très efficaces asymptotiquement. Il n'existe même pas de majoration effective connue de $\bigl|M(x)\bigr|$ en $x\exp(-c\sqrt{\log x})$. Jusqu'à présent la meilleure majoration asymptotique effective était :

$$\bigl|M(x)\bigr| < 5.3x(\log x)^{-10/9} \quad \text{pour tout } x$$

1058-6458/96 \$0.50 per page

[Schoenfeld 1969]. Par contre, la meilleure majoration « en εx », qui était :

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{1036} \quad \text{pour } x \geq 120\,727$$

[Costa Pereira 1989], est meilleure que la majoration de Schoenfeld jusqu'à $9.7802\,10^{1007}$.

Un deuxième intérêt de majorations en εx est leur intervention dans le calcul de Schoenfeld. En effet, pour obtenir la majoration en $x(\log x)^{-10/9}$ qui vient d'être évoquée, il effectue quelques convolutions successives, la première employant de façon cruciale (numériquement) une majoration en εx. L'un des auteurs de cet article reprend d'ailleurs [El Marraki] le schéma de Schoenfeld et utilise les résultats en εx donnés ici pour améliorer considérablement les résultats de Schoenfeld.

La première majoration effective en εx a été obtenue par von Sterneck [1898] :

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{9} + 8 \quad \text{pour tout } x.$$

La méthode de von Sterneck s'inspire de la méthode de [Tchebychev 1852], qui fournit des encadrements du type $(1-c')x \leq \Psi(x) \leq (1+c'')x$, où Ψ est la fonction sommatoire de la fonction Λ de von Mangoldt, égale à $\log p$ pour n puissance quelconque d'un nombre premier p. Mais la fonction Λ n'est pas bornée, et Tchebychev doit utiliser la monotonie de $\Psi(x)$. La fonction μ par contre est bornée, ce qui rend le fonctionnement de la méthode de Tchebychev à la fois plus simple et plus puissant.

La méthode de von Sterneck a été reprise par Hackel [1909], puis par Mac Leod [1967], qui donne la majoration

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{80} \quad \text{pour } x \geq 1119.$$

Diverses améliorations ajoutées à cette méthode ont ensuite conduit à

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{143.7} \quad \text{pour } x \geq 3297$$

[Dress 1977], et

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{1036} \quad \text{pour } x \geq 120\,727$$

[Costa Pereira 1989].

On notera enfin le résultat de Diamond and McCurley [1980]

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\left|M(x)\right|}{x} < \frac{1}{105},$$

qui n'a pas été accompagné par des majorations effectives jusqu'à sa reprise dans [El Marraki 1991].

Le premier résultat de cet article est une majoration « intermédiaire »

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{2360} \quad \text{pour } 10^{12} \leq x \leq 2.2959\,10^{16}, \tag{1.2}$$

obtenue en exploitant la majoration (1.1) par la méthode de von Sterneck. Le deuxième résultat est la majoration asymptotique élémentaire

$$\left|M(x)\right| \leq \frac{x}{2360} \quad \text{pour } x \geq 617\,973, \tag{1.3}$$

obtenue en complétant la majoration précédente, à gauche par des résultats obtenues directement par ordinateur, à droite par l'application de la version Costa Pereira de la méthode de von Sterneck.

2. MAJORATIONS INTERMÉDIAIRES : MÉTHODE GÉNÉRALE ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

L'idée générale consiste à introduire une fonction

$$F(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i \left[\frac{x}{a_i}\right]$$

qui se comporte, vis-a-vis du produit de convolution par μ, comme une bonne approximation de la fonction réelle constante égale à 1. Il faut pour cela :

- que F soit bornée (et elle est alors périodique), ce qui s'exprime par la relation

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{a_i} = 0\,;$$

– que le début de la suite des a_i coïncide avec la suite des entiers sans facteur carré, et que $c_i = \mu(a_i)$ pour ces premiers termes.

Dans ces conditions, le produit de convolution classique

$$\sum_{n\le x} \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = 1 \quad \text{pour tout } x$$

permet d'écrire

$$\sum_{n\le x} \mu(n)\Big(1 - F\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big) = M(x) - \sum_{i=1}^{r} c_i \tag{2.1}$$

pour $x \ge \max a_i$. On pourra consulter [Dress 1993] ou [El Marraki 1991] pour avoir un exposé pédagogique de l'utilisation de cette relation et de ses améliorations par Dress, Diamond et McCurley, et Costa Pereira.

Dans la suite de cet article, on désignera par ξ le nombre 10^{12}, borne supérieure de validité de la majoration $\big|M(x)\big| \le 0.570591\sqrt{x}$.

Théorème 1. *On a des majorations «intermédiaires» de la forme*

$$\big|M(x)\big| < \frac{x}{D} \quad \textit{pour } x \in [\xi,\, k\xi]$$

pour des couples (D,k) *convenablement choisies, dont le tableau ci-dessous donne des exemples pour des valeurs intéressantes:*

D	k	$k\xi$
11841	49	$4.900 \; 10^{13}$
10000	82.5	$8.250 \; 10^{13}$
5000	1403	$1.403 \; 10^{15}$
4000	3233	$3.233 \; 10^{15}$
3000	9500	$9.500 \; 10^{15}$
2500	18530.5	$1.85305 \; 10^{16}$
2360	22959	$2.2959 \; 10^{16}$
2000	42157.5	$4.21575 \; 10^{16}$

La démonstration de ce résultat nous occupera jusqu'à la fin du paragraphe 4. On utilise la fonction

$$F(x) = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] - \left[\frac{x}{7.5}\right],$$

dont les valeurs sont données par

$$1 - F(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \bigcup_k I_k, \\ 1 & \text{si } x \in \bigcup_k J_k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} I_k = {} & [30k+7,\ 30k+7.5[\\ & \cup [30k+13,\ 30k+17[\\ & \cup [30k+19,\ 30k+20[\\ & \cup [30k+29,\ 30k+30[, \\ J_k = {} & [30k+10,\ 30k+11[\\ & \cup [30k+22.5,\ 30k+23[\\ & \cup [30k+30,\ 30k+31[. \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$S(a,b) = \Bigg|\sum_{\frac{x}{b} < n \le \frac{x}{a}} \mu(n)\Bigg|,$$

pour a et b réels supérieurs à 1. La formule fondamentale (2.1) donne l'égalité

$$M(x) + 2 = \sum_{n\le x} \mu(n)\Big(1 - F\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big),$$

qui, compte tenu des valeurs prises par la fonction F, fournit la majoration

$$\begin{aligned} \big|M(x)\big| \le {} & S(7,7.5) + S(10,11) + \cdots + S(29,31) \\ & + S(37,37.5) + \cdots + S(59,61) \\ & + \cdots \\ & + S(30q+7,\ 30q+7.5) + \cdots \\ & \qquad + S(30q+29,\ 30q+31) \\ & + Q\Big(\frac{x}{30q+37}\Big) + 2, \end{aligned}$$

où q est un entier qui sera déterminé ultérieurement. Ici, pour chaque k, on a réuni le dernier intervalle de I_k avec celui de J_k.

Chaque somme partielle sur une période

$$S(30k+7,\ 30k+7.5) + \cdots + S(30k+29,\ 30k+31)$$

sera majorée de deux facons différentes selon la valeur de k : soit par

$$\left|M\Big(\frac{x}{30k+7}\Big)-M\Big(\frac{x}{30k+7.5}\Big)\right|+\cdots+\left|M\Big(\frac{x}{30k+29}\Big)-M\Big(\frac{x}{30k+31}\Big)\right|,$$

lui-même majoré par

$$\left|M\Big(\frac{x}{30k+7}\Big)\right|+\left|M\Big(\frac{x}{30k+7.5}\Big)\right|+\cdots+\left|M\Big(\frac{x}{30k+29}\Big)\right|+\left|M\Big(\frac{x}{30k+31}\Big)\right|,$$

lorsque k est compris entre 1 et un entier p qui sera déterminé ultérieurement ; soit par

$$\Big(Q\Big(\frac{x}{30k+7}\Big)-Q\Big(\frac{x}{30k+7.5}\Big)\Big)+\cdots+\Big(Q\Big(\frac{x}{30k+29}\Big)-Q\Big(\frac{x}{30k+31}\Big)\Big),$$

lorsque k est compris entre $p+1$ et l'entier q déja annoncé.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}|M(x)|\le{}&\left|M\Big(\frac{x}{7}\Big)\right|+\left|M\Big(\frac{x}{7.5}\Big)\right|+\cdots+\left|M\Big(\frac{x}{31}\Big)\right|\\&+\left|M\Big(\frac{x}{37}\Big)\right|+\cdots+\left|M\Big(\frac{x}{30p+31}\Big)\right|\\&+Q\Big(\frac{x}{30p+7}\Big)-Q\Big(\frac{x}{30p+7.5}\Big)+\cdots\\&+Q\Big(\frac{x}{30q+29}\Big)-Q\Big(\frac{x}{30q+31}\Big)\\&+Q\Big(\frac{x}{30q+37}\Big)+2.\end{aligned}$$

La mise en œuvre de la méthode nécessitera une majoration du reste de la fonction Q :

$$\left|Q(x)-\frac{6}{\pi^2}x\right|=|R(x)|<b\sqrt{x}\quad\text{pour } x\ge x(b), \tag{2.2}$$

où $b=0.1333$ et $x(b)=1164$ [Cohen et Dress 1988].

3. PREMIÈRE UTILISATION DE LA MÉTHODE

Si x est compris entre ξ et 7ξ, et sous les conditions supplémentaires $30p+31<\frac{1}{33}\xi$ et $30q+37<\frac{1}{1164}\xi$ (qui seront vérifiées sans difficulté), on déduit de la formule fondamentale la majoration :

$$\begin{aligned}|M(x)|\le{}&0.570591\sqrt{x}\Big(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7.5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{31}}\\&\qquad+\cdots+\frac{1}{\sqrt{30p+7}}+\frac{1}{\sqrt{30p+31}}\Big)\\&+\frac{6}{\pi^2}x\Big(\frac{1}{30p+37}-\frac{1}{30p+37.5}+\cdots\\&\qquad+\frac{1}{30q+29}-\frac{1}{30q+31}+\frac{1}{30q+37}\Big)\\&+0.1333\sqrt{x}\Big(\sqrt{\frac{1}{30(p+1)+7}}+\cdots\\&\qquad+\sqrt{\frac{1}{30q+31}}+\sqrt{\frac{1}{30q+37}}\Big)\\&+2.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Soient Σ_1, Σ_2 et Σ_3 les trois sommes entre parenthèses dans cette relation. On peut démontrer par une étude de variations de fonctions (simple mais fastidieuse) que :

$$\frac{1}{\sqrt{30k+7}}+\frac{1}{\sqrt{30k+7.5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{30k+31}}=\sqrt{\frac{96k+104}{5}}-\sqrt{\frac{96(k-1)+104}{5}}-\delta_k,$$

avec δ_k positif pour tout k. En anticipant sur le fait que les sommes seront utilisées pour des valeurs de p supérieures à 342, on pourra donc conclure que la somme Σ_1 est inférieure à

$$\sqrt{\frac{96p+104}{5}}-\sqrt{\frac{8}{5}}-\sum_{k=1}^{342}\delta_k<\sqrt{\frac{96p+104}{5}}-1.2738995,$$

tandis que

$$\Sigma_3<\sqrt{\frac{96q+104}{5}}-\sqrt{\frac{96p+104}{5}}+\sqrt{\frac{1}{30q+37}}.$$

On peut démontrer de même l'inégalité suivante, valable pour tout $k\ge 1$:

$$\frac{1}{30k+7}-\frac{1}{30k+7.5}+\cdots+\frac{1}{30k+29}-\frac{1}{30k+31}<\frac{9}{100}\Big(\frac{1}{9(k-1)+10}-\frac{1}{9k+10}\Big),$$

de sorte que l'on obtient finalement :

$$\bigl|M(x)\bigr| \le ux + v\sqrt{x} + w,$$

avec

$$\begin{aligned}
u &= \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{9}{100}\left(\frac{1}{9p+10} - \frac{1}{9q+10}\right) + \frac{1}{30q+37}\right)\\
&< \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{0.01}{p+\frac{13}{12}} + \frac{0.023334}{q+\frac{13}{12}}\right),\\
v &< 0.570591\sqrt{\frac{96p+104}{5}} - 0.7268756 + 0.1333\left(\sqrt{\frac{96q+104}{5}} - \sqrt{\frac{96p+104}{5}} + \sqrt{\frac{1}{30q+37}}\right)\\
&< 1.9161132\sqrt{p+\tfrac{13}{12}} + 0.5840914\sqrt{q+\tfrac{13}{12}} + 0.0243372\sqrt{(q+\tfrac{13}{12})^{-1}} - 0.7268756,\\
w &= 2.
\end{aligned}$$

Pour déterminer la majoration optimale (pour x fixé), on néglige évidemment le terme en $q^{-1/2}$, on oublie provisoirement que $p+\frac{13}{12}$ et $q+\frac{13}{12}$ ne peuvent varier continuement, et on doit donc résoudre le système

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{0.06}{p\pi^2}x + 1.9161132\sqrt{px}\right) = 0\\[2mm]
\dfrac{d}{dq}\left(\dfrac{0.14}{q\pi^2}x + 0.5840914\sqrt{qx}\right) = 0,
\end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
p_0 &= \left(\frac{4(0.06)^2}{1.9161132^2\pi^4}x\right)^{\frac{1}{3}} = 0.0342747\,x^{1/3},\\
q_0 &= \left(\frac{4(0.14)^2}{0.5840914^2\pi^4}x\right)^{\frac{1}{3}} = 0.1331226\,x^{1/3}.
\end{aligned}$$

(On remarque que $p_0 \ge 0.0342746\,\xi^{1/3} > 342$.)

On obtient alors la majoration provisoire

$$\bigl|M(x)\bigr| \le P + R,$$

où P est le terme principal obtenu par substitution de p_0 à $p+\frac{13}{12}$ et de q_0 à $q+\frac{13}{12}$, et R est un reste, qu'on analysera en suite. On a

$$P = a_0x^{2/3} + b_0x^{1/2} + c_0x^{1/3} + d_0,$$

avec

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0.8517743,\\
b_0 &= -0.7268756,\\
c_0 &= 0.0667029,\\
d_0 &= 2.
\end{aligned}$$

Le reste R est la somme de deux termes, $R = E_1 + E_2$. E_1 est l'erreur numérique commise en substituant dans le terme principal les réels p_0 et q_0 aux vraies valeurs $p+\frac{13}{12}$ et $q+\frac{13}{12}$ qui réalisent l'optimum sous la contrainte p et q entiers. Ces entiers p et q optimaux sont les entiers les plus proches de $p_0 - \frac{13}{12}$ et $q_0 - \frac{13}{12}$. De la sorte, comme on travaille sur la valeur d'une fonction prise à son minimum, avec une incertitude sur la variable inférieure à $\frac{1}{2}$, l'erreur E_1 est inférieure au huitième de la somme des dérivées secondes (par rapport à p et q), soit

$$\frac{3\pi^2}{64}\left(\frac{1.9161132^2}{0.06} + \frac{0.5840914^2}{0.14}\right) < 29.4369.$$

E_2 est l'erreur numérique commise dans le terme en $x^{1/3}$ en substituant q_0 à $q+\frac{13}{12}$ dans le terme en $\sqrt{(q+\frac{13}{12})^{-1}}$. Si on pose $\varphi(x) = 0.0243372\,x^{-1/2}$, alors E_2 est majoré par $\frac{1}{2}\,|\varphi'(x)|\,\sqrt{x}$, soit par

$$\tfrac{1}{4}\,0.0243372\,q_0^{-3/2}\sqrt{x} = 0.12491.$$

On obtient finalement la majoration

$$\left|M(x)\right| < ax^{2/3} + bx^{1/2} + cx^{1/3} + d,$$

avec

$$\begin{aligned} a &= 0.8517743, \\ b &= -0.7268756, \\ c &= 0.0667029, \\ d &= 2 + 29.4369 + 0.12491 = 31.5618, \end{aligned}$$

valable tant que $\left|M(x/7)\right|$ peut être majoré par $0.570591\sqrt{x/7}$, c'est à dire sur l'intervalle $I_1 = [\xi, 7\xi]$, majoration que l'on écrira sous la forme

$$\left|M(x)\right| < 0.570591\, x^{1/2} + f_1(x),$$

avec

$$f_1(x) = 0.8517743\, x^{2/3} - 1.2974666\, x^{1/2} + 0.0667029\, x^{1/3} + 31.5618$$

(cette apparente bizarrerie d'écriture est justifiée par l'usage qui sera fait dans le paragraphe suivant de cette majoration et de majorations semblables).

Pour situer intuitivement cette majoration vis-à-vis des autres, on peut noter qu'elle implique

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{11841} \quad \text{pour } \xi \le x \le 7\xi. \tag{3.2}$$

4. UTILISATION RÉCURRENTE DE LA FORMULE DE MAJORATION

Pour une deuxième utilisation du procédé, sur l'intervalle $I_2 = [7\xi, 7.5\xi]$, on a besoin de majorer $\left|M(x/7)\right|$ par $0.570591\sqrt{x/7} + f_1(x/7)$ et $\left|M(x/m)\right|$ par $0.5706\sqrt{x/m}$ pour $m \ge 7.5$. On peut donc réutiliser la majoration (3.1), en ajoutant simplement un terme correctif :

$$\left|M(x)\right| \le 0.570591\, \Sigma_1 \sqrt{x} + f_1\Bigl(\frac{x}{7}\Bigr) + \frac{6}{\pi^2}\Sigma_2\, x + 0.1333\, \Sigma_3 \sqrt{x} + 2.$$

Le terme correctif ne dépend pas de p et q, donc on obtient pour l'optimisation très exactement à la fois les mêmes valeurs que précédemment, et les mêmes estimations et majorations d'erreurs. Cela permet d'avoir la majoration

$$\left|M(x)\right| \le 0.570591\sqrt{x} + f_1(x) + f_1\Bigl(\frac{x}{7}\Bigr),$$

valable pour $x \in I_2 = [7\xi, 7.5\xi]$. On peut encore écrire

$$\left|M(x)\right| \le 0.570591\sqrt{x} + f_2(x),$$

avec $f_2(x) = f_1(x) + f_1(x/7)$. Or $f_1(x)$ est déjà calculé et l'on obtient :

$$f_2(x) = 1.0845437\, x^{2/3} - 1.7878629\, x^{1/2} + 0.1015724\, x^{1/3} + 63.1236.$$

Cette valeur de $f_2(x)$ implique la majoration suivante :

$$\left|M(x)\right| < \frac{x}{17782} \quad \text{pour } 7\xi \le x \le 7.5\xi\,; \tag{4.1}$$

donc la majoration (3.2) reste encore vraie jusqu'à 7.5ξ.

On répète ce procédé en calculant à chaque étape la majoration de $M(x)$ correspondante tant que $\xi < \frac{1}{7}x < 7\xi$. On obtient ainsi :

$$\left|M(x)\right| \le 0.570591\sqrt{x} + f_{19}(x)$$

pour $x \in I_{19} = [47\xi, 49\xi]$, avec

$$f_{19}(x) = f_1(x) + f_1\Bigl(\frac{x}{7}\Bigr) + f_1\Bigl(\frac{x}{7.5}\Bigr) + \cdots + f_1\Bigl(\frac{x}{47}\Bigr).$$

On a donc :

$$\left|M(x)\right| \le a_k x^{2/3} + (b_k + 0.570591)x^{1/2} + c_k x^{1/3} + d_k$$

pour $x \in I_k$, où les valeurs de a_k, b_k, c_k, d_k et I_k sont données par le tableau 1 jusqu'à $k = 19$, qui correspond à la limite 49ξ. Ces valeurs numériques sont calculées sans difficulté sur ordinateur. On en déduit aussi

$$\left|M(x)\right| \le \frac{x}{\mathrm{maj}_k} \quad \text{pour } x \in I_k,$$

avec maj_k donné également par le tableau 1.

I_k	a_k	$b_k + 0.570591$	c_k	d_k	maj_k
$[\ \ \xi, 7\ \xi]$	0.851774	−0.726876	0.066703	31.5618	11841
$[7\ \xi, 7.5\xi]$	1.084544	−1.217272	0.101572	63.1236	17782
$[7.5\xi, 10\ \xi]$	1.306849	−1.691040	0.135649	94.6854	15118
$[10\ \xi, 11\ \xi]$	1.490358	−2.101335	0.166610	126.2472	14595
$[11\ \xi, 13\ \xi]$	1.662570	−2.492536	0.196602	157.8090	13512
$[13\ \xi, 17\ \xi]$	1.816632	−2.852388	0.224971	189.3708	13077
$[17\ \xi, 19\ \xi]$	1.945465	−3.167070	0.250912	220.9326	13352
$[19\ \xi, 20\ \xi]$	2.065090	−3.464729	0.275909	252.4944	13055
$[20\ \xi, 22.5\xi]$	2.180693	−3.754852	0.300483	284.0562	12578
$[22.5\xi, 23\ \xi]$	2.287567	−4.028382	0.324110	315.6180	12471
$[23\ \xi, 29\ \xi]$	2.392885	−4.298922	0.347565	347.1798	12012
$[29\ \xi, 31\ \xi]$	2.483124	−4.539855	0.369276	378.7416	12503
$[31\ \xi, 37\ \xi]$	2.569439	−4.772887	0.390510	410.3034	12355
$[37\ \xi, 37.5\xi]$	2.646149	−4.986190	0.410527	441.8652	12724
$[37.5\xi, 40\ \xi]$	2.722177	−5.198065	0.430456	473.4270	12425
$[40\ \xi, 41\ \xi]$	2.795002	−5.403212	0.449960	504.9888	12365
$[41\ \xi, 43\ \xi]$	2.866639	−5.605843	0.469304	536.5506	12156
$[43\ \xi, 47\ \xi]$	2.936037	−5.803704	0.488343	568.1124	12059
$[47\ \xi, 49\ \xi]$	3.001439	−5.992959	0.506827	599.6742	12151

TABLEAU 1. On a $|M(x)| \le a_k x^{2/3} + (b_k + 0.570591)x^{1/2} + c_k x^{1/3} + d_k$ pour $x \in I_k$, ainsi que $|M(x)| \le x/\mathrm{maj}_k$ sur le même intervalle. On rappelle que $\xi = 10^{12}$.

Au delà de 49ξ les choses se compliquent. On a par exemple les majorations suivantes correspondantes à $k = 20, 21, 22$:

$$|M(x)| \le 0.570591\sqrt{x} + f_{19}(x) + 2f_1\Big(\frac{x}{49}\Big)$$

pour $x \in I_{20} = [49\xi, 50\xi]$,

$$|M(x)| \le 0.570591\sqrt{x} + f_{19}(x) + 2f_1\Big(\frac{x}{49}\Big) + f_1\Big(\frac{x}{50}\Big)$$

pour $x \in I_{21} = [50\xi, 52.5\xi]$,

$$|M(x)| \le 0.570591\sqrt{x} + f_{19}(x) + 2f_1\Big(\frac{x}{49}\Big) + f_1\Big(\frac{x}{50}\Big) + 3f_1\Big(\frac{x}{52.5}\Big)$$

pour $x \in I_{22} = [52.5\xi, 53\xi]$.

La complication provient essentiellement de la dépendance des intervalles et des termes correctifs à considérer envers la suite non régulière des discontinuités de la fonction $F(x)$ introduite au paragraphe 2. Il faut donc s'affranchir de cette irrégularité et travailler uniformément sur les intervalles

$$I_k = \Big[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\Big],$$

pour $k \ge 2$. On note (u_p) la suite des discontinuités de la fonction $|1 - F(x)|$, et N_k la fonction

$$N_k(x) = a_k x^{2/3} + b_k x^{1/2} + c_k x^{1/3} + d_k, \quad \text{pour } k \ge 2,$$

dont les coefficients seront définis ultérieurement et qui fournira la majoration

$$|M(x)| \le 0.570591\sqrt{x} + N_k(x) \quad \text{pour } x \in I_k.$$

La construction de la suite $N_i(x)$ se fait par récurrence. Supposons que l'on ait construit $N_2(x)$, $\dots, N_{k-1}(x)$. Pour construire $N_k(x)$,

on initialise $N_k(x) = f_1(x)$ et,
pour chaque discontinuité u_p de $|1 - F(x)|$,
si $u_p < \frac{1}{2}(k+1)$
on pose $h \leftarrow [k/u_p]$, l'indice (≥ 2) de l'intervalle où se trouve x/u_p, et on ajoute à $N_k(x)$ la fonction $N_h(x/u_p)$.

On obtient de cette manière une suite illimitée de majorations, dont les premières sont bien sûr identiques à celles données plus haut. C'est de cette suite que sont extraites les majorations données dans le théorème 1.

La seule question qui se pose est celle du contrôle de la précision. La construction des N_k est récursive, comme on l'a déjà vu :

$$N_k(x) = f_1(x) + \sum_{u_p < \frac{k+1}{2}} N_{[k/u_p]}\Big(\frac{x}{u_p}\Big),$$

et donc, pour le premier coefficient par exemple :

$$a_k = a_1 + \sum_{u_p < \frac{k+1}{2}} a_{[k/u_p]} u_p^{-2/3}.$$

L'élément crucial pour la précision est le nombre total de termes qui, à travers la récursivité, interviennent pour la détermination de a_k (ou d'un autre coefficient, le nombre est le même). Notons $\mathrm{nt}(k)$ ce nombre total de termes. On a

$$\mathrm{nt}(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 2 \le k \le 13, \\ 1 + \displaystyle\sum_{u_p < \frac{k+1}{2}} \mathrm{nt}\Big(\Big[\frac{k}{u_p}\Big]\Big) & \text{pour } k \ge 13. \end{cases}$$

Lemme 1. *Avec les notations introduites ci-dessus, on a*

$$\mathrm{nt}(k) \le \Big(\frac{k}{2}\Big)^\alpha \quad \textit{pour tout } k \ge 2, \tag{4.2}$$

où l'exposant $\alpha = 1.2732\ldots$ est caractérisé par la propriété

$$\sum_p \frac{1}{u_p^\alpha} = \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{7.5^\alpha} + \frac{1}{10^\alpha} + \cdots = 1.$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence.

Pour $k = 2$, la majoration (4.2) est vraie, parce que $nt(2) = 1$.

Pour $k \ge 3$, on suppose (4.2) vérifiée jusqu'à $k-1$ et l'on a alors

$$\mathrm{nt}(k) \le 1 + \sum_{u_p < \frac{k+1}{2}} \Big(\frac{1}{2}\Big[\frac{k}{u_p}\Big]\Big)^\alpha \le 1 + \sum_{u_p < \frac{k+1}{2}} \Big(\frac{k}{2u_p}\Big)^\alpha$$
$$\le \sum_{u_p=7}^{\infty} \Big(\frac{k}{2u_p}\Big)^\alpha = \Big(\frac{k}{2}\Big)^\alpha. \qquad \square$$

On déduit de ce lemme le contrôle de la précision des coefficients. La majoration la plus « longue » du théorème 1, en $x/2000$, est valable jusqu'à $x = 42\,157.5\,\xi = 4.21575\,10^{16}$, obtenu pour $k = 84\,315$. Les coefficients qui ont fourni cette majoration proviennent donc de sommes d'au plus $(k/2)^{1.2732} = 773\,376$ termes. Pour cette valeur de x, des valeurs arrondies des coefficients et des contributions correspondantes à la majoration sont :

$$\begin{aligned} a_k &= 176, & a_k x^{2/3} &= 2.06\,10^{13}, \\ b_k &= -1\,239, & b_k x^{1/2} &= 2.54\,10^{11}, \\ c_k &= 309, & c_k x^{1/3} &= 1.07\,10^{8}, \\ d_k &= 532\,226, & d_k &= 5.32\,10^{5}. \end{aligned}$$

Les calculs ont été effectués en C en réels «double», avec donc une précision relative d'environ 10^{-15}. Chaque coefficient est ainsi obtenu avec une précision relative meilleure que 10^{-9} et, comme il y a un unique terme prépondérant $a_k x^{2/3}$, il en est de même de la majoration globale.

5. MAJORATION ASYMPTOTIQUE EFFECTIVE PAR LA MÉTHODE DE COSTA PEREIRA : PRINCIPE

La formule fondamentale reste la formule (2.1), mais l'enjeu est maintenant celui de l'efficacité de la fonction F. Au contraire des tentatives précédentes (par Mac Leod, Dress, Diamond et Mc Curley : voir paragraphe 1), qui tentaient de maîtriser la borne de $|1-F|$, Costa Pereira avait utilisé une fonction du type

$$F(x) = \sum_{k<k_0} \mu(k)\Big[\frac{x}{k}\Big] + C(x),$$

où $C(x)$ est réduit à deux termes correctifs (destinés à forcer la périodicité de F). Le résultat brut de l'utilisation d'une telle fonction est excellent pour des très grandes valeurs de x mais nécessite un traitement spécifique, élaboré par Costa Pereira, pour conserver son efficacité pour des valeurs « intermédiaires » de x.

Grâce aux majorations intermédiaires établies dans la première partie de cet article, les difficultés rencontrées par Costa Pereira disparaissent et l'on peut utiliser une fonction F du même type mais encore plus puissante.

Pour la construction de la fonction F on procède de la façon suivante : on choisit tout d'abord un entier k_0, et on construit

$$F(x) = \sum_{i=1}^{im_1} c_i \Big[\frac{x}{a_i}\Big],$$

avec les a_i pris comme la suite des entiers sans facteur carré compris entre 1 et k_0, et $c_i = \mu(a_i)$. Ensuite on ajoute des termes correctifs de la forme $c_i[x/a_i]$ (a_i et c_i étant des entiers) pour que la fonction $F(x)$ ne s'éloigne pas trop de 1 pour x supérieur à k_0 mais restant du même ordre de grandeur. La fonction encore incomplète $F(x)$ s'écrit alors :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{im_1} c_i \Big[\frac{x}{a_i}\Big] + \sum_{i=im_1+1}^{im} c_i \Big[\frac{x}{a_i}\Big],$$

avec $c_i = \mu(a_i)$ pour $1 \le i \le im_1$ (a_i entier sans facteur carré), et pour $im_1+1 \le i \le im$ les termes a_i, c_i étant choisis empiriquement de façon à empêcher $F(x)$ de trop s'écarter de 1.

Enfin pour forcer la périodicité on choisit les deux derniers termes de façon à avoir $\sum_{i=1}^{im+2} c_i/a_i = 0$: on pose $\sum_{i=1}^{im} c_i/a_i = s$ (petit), on définit aa_1 et cc_1 par $aa_1 =$ l'entier le plus voisin de $1/|s|$, $cc_1 = +1$ ou -1, puis on pose $s + cc_1/aa_1 = s'$ et on définit le dernier terme par $aa_2 = 1/|s'|$ et $cc_2 = +1$ ou -1 (aa_2 est l'unique dénominateur rationnel non entier, son ordre de grandeur est supérieur à aa_1^2). Donc finalement la fonction $F(x)$ s'écrit :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{im_1} c_i \Big[\frac{x}{a_i}\Big] + \sum_{i=im_1+1}^{im} c_i \Big[\frac{x}{a_i}\Big] + cc_1 \Big[\frac{x}{aa_1}\Big] + cc_2 \Big[\frac{x}{aa_2}\Big], \quad (5.1)$$

et satisfait la condition

$$\sum_{i=1}^{im+2} \frac{c_i}{a_i} = 0, \quad (5.2)$$

où on a posé $a_{im+1} = aa_1$, $c_{im+1} = cc_1$, $a_{im+2} = aa_2$, $c_{im+2} = cc_2$.

Exemple. On prend $k_0 = 10$, de sorte que $F(x)$ commence par

$$[x] - \Big[\frac{x}{2}\Big] - \Big[\frac{x}{3}\Big] - \Big[\frac{x}{5}\Big] + \Big[\frac{x}{6}\Big] - \Big[\frac{x}{7}\Big].$$

Si on ajoute, par exemple, quatre termes correctifs

$$\Big[\frac{x}{15}\Big] - \Big[\frac{x}{17}\Big] + \Big[\frac{x}{40}\Big] - \Big[\frac{x}{47}\Big],$$

on a alors $\sum c_i/a_i = (489.54048)^{-1}$: on obtient $\sum c_i/a_i = 0$ en ajoutant les deux termes ultimes

$$-\Big[\frac{x}{490}\Big] - \Big[\frac{x}{522\,013.16}\Big].$$

Comme la fonction $F(x)$ est périodique de période le ppcm des a_i, il est hors de question de travailler sur une période, mais le lemme suivant nous permettra de déterminer un encadrement de $F(x)$ raisonnablement proche de l'encadrement optimal.

Lemme 2 (Costa Pereira, El Marraki). *Soient N_0 un entier positif et $Q = Q(k_0, N_0)$ l'ensemble des entiers $q < k_0$ sans facteur carré, et premiers avec N_0. On pose*

$$G_q(x) = -\mu(q) \sum_{\substack{d|N_0 \\ d<k_0/q}} \mu(d) \Big\{\frac{x}{d}\Big\},$$

$$m_q = \max_{k\in\mathbf{Z}} G_q(k)$$

$$u_q = -\mu(q) \sum_{\substack{d|N_0 \\ d<k_0/q}} \frac{\mu(d)}{d}$$

et

$$\varepsilon_q = \begin{cases} 0 & si\ u_q \le 0, \\ \dfrac{q-1}{q} u_q & si\ u_q > 0. \end{cases}$$

Alors on a

$$F(x) \le m + m_1,$$

où

$$m = \sum_{q \in Q} (m_q + \varepsilon_q) + m_1$$

et

$$m_1 = \sup_x \biggl(-\sum_{k=im_1+1}^{k=im} c_i \Bigl\{ \frac{n}{a_i} \Bigr\} + cc_1 \Bigl\{ \frac{n}{aa_1} \Bigr\} + cc_2 \frac{\{x\}}{aa_2} - cc_2 \Bigl\{ \frac{x}{aa_2} \Bigr\} \biggr).$$

Remarque. m_1 sera calculé numériquement en majorant $-c\{y\}$ par $|c|$ si $c < 0$, et par 0 si $c > 0$.

Ce lemme est essentiellement dû à Costa Pereira. On trouvera la démonstration complète dans [Pereira 1989] ou [El Marraki 1991]. Nous en exposons brièvement l'idée. Si l'on a une fonction $F(x) = \sum c_i [x/a_i]$, on peut la décomposer en une composante affine

$$F_a(x) = \sum c_i \Bigl(\frac{x}{a_i} - \frac{1}{2} \Bigr) = x \sum \frac{c_i}{a_i} - \frac{1}{2} \sum c_i,$$

et une composante périodique

$$F_p(x) = -\sum c_i \Bigl(\Bigl\{ \frac{x}{a_i} \Bigr\} - \frac{1}{2} \Bigr).$$

Dans le cas où F est périodique, la composante affine est constante : $F_a(x) = -\frac{1}{2} \sum c_i$, et le problème est de majorer la composante périodique.

On a trivialement $|F_p(x)| \le \frac{1}{2} \sum |c_i|$, mais on peut obtenir beaucoup mieux en regroupant des termes. Par exemple, si on trouve simultanément a (impair) et $2a$ parmi les a_i, avec comme coefficients c_i, $\mu(a)$ et $\mu(2a)$, on a

$$\Bigl| -\Bigl(\mu(a) \Bigl(\Bigl\{ \frac{x}{a} \Bigr\} - \frac{1}{2} \Bigr) + \mu(2a) \Bigl(\Bigl\{ \frac{x}{2a} \Bigr\} - \frac{1}{2} \Bigr) \Bigr) \Bigr| \le \frac{1}{2}$$

(au lieu de ≤ 1). On aurait de même

$$\Bigl| -\Bigl(\mu(a) \Bigl(\Bigl\{ \frac{x}{a} \Bigr\} - \frac{1}{2} \Bigr) + \mu(2a) \Bigl(\Bigl\{ \frac{x}{2a} \Bigr\} - \frac{1}{2} \Bigr) + \mu(3a) \Bigl(\Bigl\{ \frac{x}{3a} \Bigr\} - \frac{1}{2} \Bigr) \Bigr) \Bigr| \le \frac{2}{3},$$

au lieu de $\le \frac{3}{2}$.

C'est cette idée qui préside au lemme 2, avec la nuance qu'il suffit en fait de majorer $-\sum c_i \{x/a_i\}$. En effet, lorsque F est périodique, on a

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} F(x) + \sup_{x \in \mathbf{R}} F(x) = -\sum c_i.$$

Pour l'énoncé des lemmes de majoration de $F(x)$, on séparera ce qui concerne la partie « régulière » de F :

$$\sum_{i=1}^{im_1} c_i \Bigl[\frac{x}{a_i} \Bigr] = \sum_{k < k_0} \mu(k) \Bigl[\frac{x}{k} \Bigr],$$

de la partie complémentaire :

$$\sum_{i=im_1+1}^{im+2} c_i \Bigl[\frac{x}{a_i} \Bigr].$$

On remarque que les fonctions $G_q(x)$ qui interviennent dans l'énoncé du lemme dépendent uniquement du plus grand diviseur de N_0 strictement inférieur à k_0/q, que l'on notera $\delta = \delta(N_0, k_0, q)$.

Posons alors :

$$\begin{aligned} H_\delta(x) &= \sum_{\substack{d \mid N_0 \\ d \le \delta}} \mu(d) \Bigl\{ \frac{x}{d} \Bigr\}, \\ H_\delta^+ &= \max_{k \in \mathbf{Z}} H_\delta(k), \\ H_\delta^- &= \min_{k \in \mathbf{Z}} H_\delta(k). \end{aligned}$$

On a $G_q(x) = -\mu(q) H_\delta(x)$, de sorte que :

$$m_q = \max_{k \in \mathbf{Z}} G(k) = \begin{cases} -H_\delta^- & \text{si } \mu(q) = 1, \\ H_\delta^+ & \text{si } \mu(q) = -1. \end{cases}$$

On peut effectuer un changement similaire de notation pour u_q en posant :

$$U_\delta = \sum_{\substack{d \mid N_0 \\ d \le \delta}} \frac{\mu(d)}{d},$$

ce qui donne $u_q = -\mu(q) U_\delta$.

Le calcul effectif de m se fait par regroupement des entiers q qui fournissent le même δ, et l'on a le résultat suivant :

Lemme 3 (Costa Pereira, El Marraki). *Avec les notations précédentes, soit* (δ_j) *la suite ordonnée croissante des diviseurs de* N_0*, et posons en outre*

$$A_j = \Big\{ \frac{k_0}{\delta_{j+1}} \le q < \frac{k_0}{\delta_j} \;\Big|\; \mu(q) = 1, (q, N_0) = 1 \Big\},$$
$$B_j = \Big\{ \frac{k_0}{\delta_{j+1}} \le q < \frac{k_0}{\delta_j} \;\Big|\; \mu(q) = -1, (q, N_0) = 1 \Big\}.$$

Alors on a

$$m = \sum_{\substack{q<k_0\\ \mu(q)\neq 0\\ (q,N_0)=1}} (m_q + \varepsilon_q) = \sum_{\delta_j < k_0} M_j,$$

où

$$M_j = -H^-_{\delta_j}\operatorname{Card}(A_j) - \mathcal{H}(-U_{\delta_j})U_{\delta_j} \sum_{q\in A_j} \frac{q-1}{q}$$
$$+ H^+_{\delta_j}\operatorname{Card}(B_j) + \mathcal{H}(U_{\delta_j})U_{\delta_j} \sum_{q\in B_j} \frac{q-1}{q}.$$

(Ici $\mathcal{H}$ est la fonction échelon unité : $\mathcal{H}(x) = 1$ pour $x \ge 0$ et $\mathcal{H}(x) = 0$ pour $x < 0$.)

Dans la pratique, il est très rapide de calculer la table des H^+_δ et H^-_δ pour $N_0 = 30\,030$, et la majoration qui résulte des lemmes 2 et 3 s'effectue très rapidement. (Pour la table des H_δ voir [El Marraki 1991, annexe 1]). Le lemme 2 nous permet d'encadrer la fonction $F(x)$, et pour la majoration de $\big|M(x)\big|$ elle-même, on utilise les deux résultats :

Lemme 4. *Soit* F *une fonction définie comme dans* (5.1) *et qui vérifie la condition* (5.2)*. Soit* $G(x) = \big|1 - F(x)\big|$ *et* G *un majorant de* $G(x)$*. Soient* $b = 0.1333$ *et* $x(b) = 1164$*, comme dans la majoration* (2.2)*. Soit* N *un entier positif* (*limite des calculs*)*. Si* $x \ge \max(a_{im}, (N+1)x(b))$*, on a la majoration*

$$\big|M(x)\big| \le \frac{6}{\pi^2}ux + bv\sqrt{x} + w,$$

avec

$$u = u(N) = \sum_{n=1}^{N} \big(G(n) - G(n-1)\big)\frac{1}{n} + \frac{G - G(N)}{N+1},$$

$$v = v(N) = \sum_{n=1}^{N} \big|G(n) - G(n-1)\big| \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{G - G(N)}{\sqrt{N+1}},$$

$$w = c.$$

Démonstration. On pose $w = \big|\sum_{i=1}^r c_i\big|$ et on déduit de la formule fondamentale (2.1) la majoration :

$$\big|M(x)\big| \le \Big|\sum_{n\le x} \mu(n)\Big(1 - F\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)\Big| + w$$
$$\le \sum_{n\le x} |\mu(n)| \,\Big|1 - F\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big| + w$$

pour $x \ge a_{im}$. On considère une limite N pour x, et la majoration précédente se développe ainsi :

$$\big|M(x)\big| \le \sum_{n=1}^{N} G(n)\Big(Q\Big(\frac{x}{n}\Big) - Q\Big(\frac{x}{n+1}\Big)\Big)$$
$$+ G \sum_{n\le \frac{x}{N+1}} |\mu(n)| + w,$$

soit, en notant que $G(0) = 0$,

$$\big|M(x)\big| \le \sum_{n=1}^{N} (G(n) - G(n-1))Q\Big(\frac{x}{n}\Big)$$
$$+ (G - G(N))Q\Big(\frac{x}{N+1}\Big) + w.$$

On utilise alors l'encadrement (2.2) de la fonction $Q(x)$, et on obtient le résultat du lemme. ☐

Remarque. Lorsque N tend vers l'infini, le coefficient du terme en x dans la majoration du lemme tend vers

$$I(F) = \frac{6}{\pi^2} \int_1^\infty \frac{|1 - F(u)|}{u^2} du,$$

et l'on a ainsi une borne inférieure des majorations que l'on peut obtenir par l'utilisation d'une fonction donnée F.

Corollaire. *Soit* $\tau > \max(a_{im}, (N+1)x(b))$*. Pour tout* $x \ge \tau$*, on a*

$$\big|M(x)\big| \le \Big(\frac{6}{\pi^2}u + \frac{bv}{\sqrt{\tau}} + \frac{w}{\tau}\Big)x,$$

avec les valeurs de $u = u(N)$*,* $v = v(N)$ *et* w *données au lemme 4.*

6. MAJORATIONS NUMÉRIQUES

Théorème 2. *On a la majoration*

$$\left|M(x)\right| \le \frac{x}{2360} \quad \textit{pour } x \ge 617\,973.$$

Démonstration. Elle s'effectue en découpant la demi-droite $[617\,973, +\infty[$ en quatre intervalles consécutifs.

Primo, pour $x \in [617\,973, 1\,813\,318]$: vérification directe sur ordinateur.

Secondo, pour $x \in [1\,813\,318, 10^{12}]$: la majoration (1.1) implique le résultat.

Tertio, pour $x \in [10^{12}, 2.2959\,10^{16}]$: c'est l'avant-dernier résultat indiqué dans le tableau 1.

Quarto, pour $x \in [2.2959\,10^{16}, +\infty[$: la majoration résulte de l'utilisation d'une fonction $F(x)$ du type Costa Pereira, ce que nous allons maintenant détailler.

De nombreux essais ont conduit à sélectionner la fonction

$$F(x) = \sum_{i=1}^{16075} c_i \left[\frac{x}{a_i}\right] + \sum_{i=16076}^{16324} c_i \left[\frac{x}{a_i}\right] + \left[\frac{x}{111\,364}\right] + \left[\frac{x}{304\,474\,467\,190.71}\right].$$

Pour la première somme, les a_i sont tous les entiers sans facteur carrés inférieurs à $k_0 = 26\,441$, et $c_i = \mu(a_i)$. Les termes de la deuxième somme ont été déterminés automatiquement de manière à forcer $\left|1 - F(x)\right|$ à ne pas trop s'écarter de 1 sur l'intervalle $[k_0,\ 2.45\,k_0]$. Enfin, les deux derniers termes sont destinés à assurer la périodicité de F.

La condition de validité des formules permettant d'établir la majoration est a priori

$$x \ge \max\left(a_{im+2},\ Nx(b)\right).$$

Le corollaire limitant le résultat à $x \ge \tau$, nos valeurs numériques respectent toujours $x \ge Nx(b)$. Pour ce qui est de la condition $x \ge a_{im+2}$, les deux derniers termes présentent des valeurs très grandes de a_j ($a_{im+1} = aa_1$ et $a_{im+2} = aa_2$) ; par contre on a toujours $x \ge a_{im}$. On a utilisé la formule

$$\sum_{n \le x} \mu(n)\left(1 - \sum_{i=1}^{im+2} c_i \left[\frac{x/n}{a_i}\right]\right) = M(x) - \sum_{i=1}^{im+2} c_i.$$

C'est cette formule qui nécessite a priori $x \ge a_{im+2}$; mais, dans nos conditions d'application a_{im+1} et a_{im+2} très grands, on a

$$\sum_{n \le x} \mu(n)\left(1 - \sum_{i=1}^{im+2} c_i \left[\frac{x/n}{a_i}\right]\right) = M(x) - \sum_{i=1}^{im} c_i.$$

Comme $|c_{im+1}| = |c_{im+2}| = 1$, cela équivaut à une simple perturbation de 2 sur le coefficient w, ce qui a un effet complètement négligeable sur le résultat final.

On peut maintenant appliquer le lemme 4 et son corollaire à cette fonction, avec $\tau = 2.2959\,10^{16}$. Le tableau 2 donne quelques résultats jusqu'à la valeur de N retenue. $\square$

N	u	v	w	majoration
5 000 000	0.00161104088203	1827.158668939	4	1/1019
10 000 000	0.00113678352589	2567.293944583	4	1/1442
30 000 000	0.00082069312288	4364.682366346	4	1/1989
60 000 000	0.00074170253303	6079.887596894	4	1/2191
90 000 000	0.00071537145032	7370.203436113	4	1/2265
120 000 000	0.00070220370757	8441.039944824	4	1/2302
180 000 000	0.00068903769070	10203.594030132	4	1/2337
240 000 000	0.00068245444494	11659.293934684	4	1/2352
320 000 000	0.00067751736741	13304.978400331	4	1/2360.7

TABLEAU 2. Données pour la démonstration du théorème 2.

On peut comparer la majoration obtenue avec la limite de son terme principal

$$\frac{6}{\pi^2}u(\infty) = I(F) = \frac{6}{\pi^2}\int_1^\infty \frac{|1-F(u)|}{u^2}du \approx \frac{1}{2500}.$$

Le terme $bv(N)/\sqrt{\tau}$ représente environ 4% de la majoration et on ne peut attendre aucune amélioration notable d'un abaissement du coefficient b dans la relation (2.2).

Il reste deux problèmes à étudier : celui de la rapidité du calcul et celui du contrôle de la précision.

On doit calculer des valeurs de $F(x)$, fonction composée d'environ 16 000 termes, jusqu'à des valeurs de x de l'ordre de $3.2\,10^8$. Le temps de calcul des valeurs consécutives de $F(x)$ est alors trop grand. Pour remédier à ce problème on utilise le fait que la plupart des termes de F ne changent pas en passant de $F(x)$ à $F(x+1)$: on choisit la taille lc du bloc de valeurs à calculer, on calcule et on stocke dans un tableau TF les valeurs de $F(x)$, $F(x+1)$, ..., $F(x+lc)$ de la manière suivante :

on calcule $F(x)$;
pour $i=0$ à $i=lc$
  on pose $TF[i] \leftarrow F(x)$;
pour $j=1$ à $j=im$
  si $c_j\left[\dfrac{x+lc}{a_j}\right] \neq c_j\left[\dfrac{x}{a_j}\right]$
    pour $i=1$ à $i=lc$
      on pose $TF[i] \leftarrow TF[i]+c_j\left[\dfrac{x+i}{a_j}\right]-c_j\left[\dfrac{x}{a_j}\right]$.

L'optimum s'obtient pour lc de l'ordre de $\sqrt{im}$, et le facteur gagné est alors aussi de l'ordre de $\sqrt{im}$, ce qui représente un gain considérable par rapport au calcul « brut ».

Le contrôle de la précision est trivial : on a des sommes $\sum_n n^{-1}\big(G(n)-G(n-1)\big)$ et $\sum_n n^{-1/2}\times \big|G(n)-G(n-1)\big|$, où $G(n)-G(n-1)$ est exact car entier. Si l'on somme jusqu'à $N=3.2\,10^8$ avec des réels « double » en C, d'une précision relative d'environ 10^{-15}, la précision sur le résultat final est donc d'environ 10^{-7}, ce qui est amplement suffisant.

BIBLIOGRAPHIE

[Cohen et Dress 1988] H. Cohen et F. Dress, "Estimations numériques du reste de la fonction sommatoire relative aux entiers sans facteur carré", *Publications mathématiques d'Orsay*: *Colloque de théorie analytique des nombres, Marseille, 1985* (1988), 73–76.

[Costa Pereira 1989] N. Costa Pereira, "Elementary estimates for the Chebyshev function $\Psi(x)$ and the Möbius function $M(x)$", *Acta Arith.* **52** (1989), 307–337.

[Diamond and McCurley 1977] H. G. Diamond et K. S. McCurley, *Constructive elementary estimates for $M(x)$*, pp. 239–253 in *Analytic Number Theory*, Lecture Notes in Math. **899**, Springer-Verlag, New York, 1980.

[Dress 1977] F. Dress, "Majorations de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius", *Bull. Soc. Math. Fr.*, mémoire n° 49–50 (1977), 47–52.

[Dress 1993] F. Dress, "Fonction sommatoire de la fonction de Möbius, 1. Majorations expérimentales", *Experimental Math.* **2** (1993), 93–102.

[El Marraki 1991] M. El Marraki, "Majorations effectives de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius", Thèse, Univ. Bordeaux, 1991.

[El Marraki] M. El Marraki, "Majorations asymptotiques de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius", soumis à *Journal of Number Theory*.

[Hackel 1909] R. Hackel, "Zur elementaren Summierung gewisser zahlentheoretischer Funktionen", *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Abt. 2a* **118** (1909), 1019–1034.

[Mac Leod 1969] R. A. Mac Leod, "A new estimate for the sum $M(x)=\sum_{n\le x}\mu(n)$", *Acta Arith.* **13 (1967)**, 49–59. Erratum, *ibid.* **16** (1969), 99–100.

[Schoenfeld 1960] L. Schoenfeld, "An improved estimate for the summatory function of the Möbius function", *Acta Arith.* **15** (1960), 221–233.

[von Sterneck 1898] D. von Sterneck, "Bemerkung über die Summierung einiger zahlentheoretischen Funktionen", *Monatsh. Math. Phys.* **9** (1898), 43–45.

[Tchebychev 1854] P. L. Tchebychev, "Mémoire sur les nombres premiers", *J. de Math.* **17** (1852), 366–390, et *Mémoire des savants étrangers*, Saint-Pétersbourg (1854).

François Dress, Laboratoire d'Arithmétique Algorithmique eXpérimentale (A2X), UMR CNRS n° 9936, Université Bordeaux 1, F-33405 Talence cedex, France (dress@ceremab.u-bordeaux.fr)

Mohamed El Marraki, Laboratoire d'Arithmétique Algorithmique eXpérimentale (A2X), UMR CNRS n° 9936, Université Bordeaux 1, F-33405 Talence cedex, France (marraki@ceremab.u-bordeaux.fr)

Received January 5, 1993; accepted May 21