Algunas maneras juveniles de evaluar $\zeta(2k)$

Argimiro Arratia
Departamento de Matemáticas,
Universidad Simón Bolívar
Apartado 89000, Caracas 1080-A,
Venezuela
correo–e: arratia@ma.usb.ve

Durante mi licenciatura en matemáticas sentí fascinación por los típicos objetos de culto de las matemáticas. Entre estos, la función zeta de Riemann, ocupó un lugar grande en el conjunto de mis predilecciones, y, luego de haber aprendido series de Fourier (otra de mis fascinaciones), se me ocurrió una fórmula para evaluar $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, cuando s es un número entero par y positivo.

Hoy, la fórmula de mi juventud luce como un buen ejercicio para estudiantes de pregrado que, sin embargo, no he visto en ninguna forma publicada en los libros clásicos de análisis (ni en otros no tan clásicos) y, más aún, desconocida por algunos expertos analistas que consulté, quienes (tal vez a manera de retribución) me revelaron otras fórmulas para calcular la misma suma, producidas también durante sus indagaciones juveniles. Exhibo entonces a continuación mi juvenil manera de evaluar $\zeta(2k)$, seguida de las juveniles fórmulas de algunos de los expertos analistas con quienes conversé.

Para todo par de enteros positivos s y n

$$\int x^s \cos nx\, dx = \sum_{i=0}^{s} \frac{s!}{(s-i)!} x^{s-i} \frac{f^{(i+1)}(x)}{n^{2(i+1)}} \tag{1}$$

donde $f(x) = -\cos nx$ y $f^{(i)}$ es la i-ésima derivada de f. (La demostración es por inducción en s y utilizando integración por partes.)

Sea s un número par. Evaluando la integral (1) sobre el intervalo $[0, \pi]$, obtenemos

$$\int_0^\pi x^s \cos nx\, dx = \cos n\pi \sum_{i=1}^{s/2} (-1)^{i-1} \frac{\pi^{s-(2i-1)}(s!)}{n^{2i}(s-(2i-1))!} \tag{2}$$

Sea $g(x) = x^s$ para s un entero par positivo y $x \in [-\pi, \pi]$. Entonces g es una función par y, por lo tanto, la serie de Fourier para g de período 2π es una serie de cosenos:

$$x^s = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^s\, dx = \frac{2}{s+1}\pi^s$$

y

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cos n\pi \sum_{i=1}^{s/2} (-1)^{i-1} \frac{\pi^{s-(2i-1)}(s!)}{n^{2i}(s-(2i-1))!} \quad \text{(por (2))}.$$

En consecuencia,

$$x^s = \frac{\pi^s}{s+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \cos nx \left(\sum_{i=1}^{s/2} (-1)^{i-1} \frac{\pi^{s-2i}(s!)}{n^{2i}(s-(2i-1))!} \right) \tag{3}$$

Sea $x = \pi$ en (3). Utilizando la propiedad de linealidad de las series y que $\cos^2 n\pi = 1$, obtenemos

$$(-1)^{s/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^s}{2(s+1)(s-1)!} + \pi^s \sum_{i=1}^{s/2-1} \frac{(-1)^i \pi^{-2i}}{(s-(2i-1))!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2i}} \tag{4}$$

La ecuación (4) nos da los valores de la función $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, cuando s es un entero par positivo, en términos de los valores de $\zeta(k)$ para $k = 2, 4, 6, \ldots, s-2$. (Adoptamos la convención de que la suma de la derecha es 0 cuando su límite superior es menor que su límite inferior.)

Por ejemplo, para $s = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Para $s = 4$,

$$(-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{2 \cdot 5 \cdot 3!} - \frac{\pi^2}{3!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^4}{60} - \frac{\pi^2}{6}\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^4}{90}$$

por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

Análogamente, para $s=6$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\pi^6\left(\frac{1}{2\cdot 7\cdot 5!}-\frac{\pi^{-2}}{5!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^{-4}}{3!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right)=\frac{\pi^6}{945}$$

etc.

* * *

Otras fórmulas. Stefania Marcantognini exhibe en la puerta de su oficina, en el IVIC, un método simple para calcular $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, el cual se atribuye a Euler (1707–1783), y sólo requiere conocimientos de trigonometría, un poco de álgebra y saber calcular límites. El método se puede generalizar a uno que permite calcular los valores de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$, para cualquier $k\geq 1$, y es esta fórmula la que presento a continuación.

El punto de partida es la fórmula de De Moivre: $(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)^a=\cos(a\theta)+i\,\mathrm{sen}\,(a\theta)$, cierta para todo número real a y $\theta\in(-\pi,\pi]$. Según esta fórmula, para cualquier entero positivo m, $\mathrm{sen}\,[(2m+1)\theta]$ es la parte imaginaria de $(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{2m+1}$; por lo que, si desarrollamos este binomio y consideramos sólo la parte imaginaria, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\,[(2m+1)\theta]&=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{2m+1}{2n+1}\,\mathrm{sen}^{\,2n+1}(\theta)\cos^{2(m-n)}(\theta)\\&=(\,\mathrm{sen}^{\,2m+1}(\theta))\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{2m+1}{2n+1}\cot^{2(m-n)}(\theta)\end{aligned}$$

Para cualquier $\theta=\frac{n\pi}{2m+1}$, con $n=1,\ldots,m$, $\mathrm{sen}\,[(2m+1)\theta]=\mathrm{sen}\,(n\pi)=0$, mientras que $\mathrm{sen}^{\,2m+1}(\theta)\neq 0$. Por lo tanto, la raíces del polinomio

$$p(x)=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{2m+1}{2n+1}x^{(m-n)}\tag{5}$$

son $\cot^2(n\pi/(2m+1))$ para $n=1,\ldots,m$.

Ahora considere la conocida desigualdad, $\tan x\geq x\geq\,\mathrm{sen}\,x$, válida para todo $x\in[0,\pi/2)$. De ésta se obtiene, para todo entero positivo k, que

$$(\cot^2 x)^k\leq\frac{1}{x^{2k}}\leq(\cot^2 x+1)^k$$

y, en particular, para $x_n = \frac{n\pi}{2m+1}$ con $n = 1, \ldots, m$, se tiene

$$\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2k} (\cot^2(x_n))^k \leq \frac{1}{n^{2k}} \leq \left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2k} (\cot^2(x_n)+1)^k$$

Desarrollamos el binomio $(\cot^2(x_n)+1)^k = \sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (\cot^2(x_n))^r$, y, tomando sumas respecto de n desde 1 hasta m en la desigualdad anterior, nos queda

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2k} \sum_{n=1}^{m} (\cot^2(x_n))^k &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{2k}} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2m+1}\right)^{2k} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sum_{n=1}^{m} (\cot^2(x_n))^r \end{aligned} \tag{6}$$

Hemos logrado acotar la m-ésima suma parcial de $\zeta(2k)$ por ciertas constantes que multiplican sumas de potencias enteras de las raíces del polinomio en (5), y nuestro próximo paso será calcular estas últimas sumas. Para ello empleamos las fórmulas, que se atribuyen a Newton, que expresan las sumas de las potencias enteras de las raíces de cualquier polinomio de coeficientes enteros en términos de los coeficientes del polinomio: Dado un polinomio cualquiera de coeficientes enteros de la forma

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m = 0,$$

supóngase que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son las raíces de este polinomio, y defínase $\mathcal{S}_k := \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^k$, para $k \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= -A_1 \\ \mathcal{S}_2 &= -A_1\mathcal{S}_1 - 2A_2 \\ \mathcal{S}_3 &= -A_1\mathcal{S}_2 - A_2\mathcal{S}_1 - 3A_3 \\ &\vdots \\ \mathcal{S}_{m-1} &= -A_1\mathcal{S}_{m-2} - A_2\mathcal{S}_{m-3} - \cdots - (m-1)A_{m-1} \end{aligned}$$

(La demostración de estas fórmulas se puede ver en la obra de G. Chrystal, *Algebra, an elementary textbook*, 7ma edición, 1964. La primera edición de esta obra data de 1886.)

En particular, para nuestro polinomio en (5), cuyas raíces son $\cot^2(x_n)$ con

$x_n = n\pi/(2m+1)$ para $n = 1, 2, \ldots, m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \cot^2(x_n) &= \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3} \\
\sum_{n=1}^{m} (\cot^2(x_n))^2 &= \frac{m^2(2m-1)^2}{9} - 2\frac{\binom{2m+1}{5}}{\binom{2m+1}{1}} \\
&= \frac{m^2(2m-1)^2}{9} - \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{15} \\
\sum_{n=1}^{m} (\cot^2(x_n))^3 &= \frac{m(2m-1)}{3}\left(\frac{m^2(2m-1)^2}{9} - \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{10}\right) \\
&- 3\frac{\binom{2m+1}{7}}{\binom{2m+1}{1}} \\
&= \frac{m^2(2m-1)^2}{9}\left(\frac{m(2m-1)}{3} - \frac{3(m-1)(2m-3)}{10}\right) \\
&- \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)(m-2)(2m-5)}{210} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Basta ahora sustituir las sumas de potencias de $\cot^2(x_n)$ por sus valores en la desigualdad (6) para el k que se necesite y, de esta manera, acotar la m-ésima suma parcial de $\zeta(2k)$ por funciones en m. Una simple aplicación del teorema del sandwich para límites nos dará el resultado deseado. Por ejemplo, para $k = 1$ la desigualdad (6) nos queda

$$\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}\left(\frac{m(2m-1)}{3}\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{(2m+1)^2}\left(m + \frac{m(2m-1)}{3}\right)$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Para $k = 2$ la desigualdad (6) nos queda

$$\frac{\pi^4}{(2m+1)^4}\left(\frac{m^2(2m-1)^2}{9} - \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{15}\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^4}$$

$$\leq \frac{\pi^4}{(2m+1)^4}\left(m + \frac{2m(2m-1)}{3} + \frac{m^2(2m-1)^2}{9} - \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{15}\right)$$

en consecuencia,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

y de igual manera se calculan los otros valores de $\zeta(2k)$.

* * *

Alfredo Octavio me enseñó cómo expresar $\zeta(2)$ en términos de ciertas integrales dobles, y su fórmula es fácilmente generalizable a cualquier potencia s. Esta fórmula la aprendió Alfredo de su profesor Allen Shields en la Universidad de Michigan, cuando fue joven estudiante en esa universidad. El método requiere conocer técnicas un poco más avanzadas de las utilizadas en los dos anteriores, pero nada que no se pueda aprender en el pregrado de matemáticas.

Comenzamos por observar que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2k}}=\sum_{m=2n}\frac{1}{m^{2k}}+\sum_{m=2n+1}\frac{1}{m^{2k}}=\frac{1}{4^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\left(\frac{4^k}{4^k-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}\,. \tag{7}$$

Pero,

$$\frac{1}{(2n+1)}=\int_0^1 x^{2n}\,dx,$$

y, por el Teorema de Fubini,

$$\frac{1}{(2n+1)^{2k}}=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{2k}x_1^{2n}\cdots x_{2k}^{2n}\,dx_1\cdots dx_{2k}.$$

Sumando a ambos lados e intercambiando suma con integrales (otra vez Fubini), nos queda que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{2k}\frac{1}{(1-x_1^2\cdots x_{2k}^2)}\,dx_1\cdots dx_{2k}, \tag{8}$$

Juntando (7) y (8), obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\left(\frac{4^k}{4^k-1}\right)\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{2k}\frac{1}{(1-x_1^2\cdots x_{2k}^2)}\,dx_1\cdots dx_{2k} \tag{9}$$

ahora sólo hace falta calcular la integral múltiple. Antes de indicar al lector cómo hacerlo, déjeme advertirle primero cómo **no** hacerlo. Comenzando con $k = 1$, el lector podría observar que al integrar respecto de una variable y fijando la otra se obtiene

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1-xy} \right) dx\, dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\log(1+y)}{y} - \frac{\log(1-y)}{y} \right) dy \qquad (10)$$

Las últimas integrales no tienen primitiva elemental; así que el siguiente paso natural (i.e., en el que coincidieron varios matemáticos que consulté en el pasillo) es sustituir $\log(1+y)$ y $\log(1-y)$ por sus series de Taylor, hacer las cancelaciones necesarias, permutar sumas con integrales, etc. Este camino está condenado al fracaso, ya que al final se llega a la serie que originalmente deseamos calcular, esto es a $\zeta(2)$, sin tenerse alguna información sobre su valor numérico.

Dadas estas dificultades para calcular la integral múltiple en (9), nos limitaremos a estudiar el caso $k = 1$. Aquí veremos que técnicas de variable compleja, propias de un curso de licenciatura, son suficientes. La siguiente solución se debe a Enrique Cabaña.

Partiendo de la ecuación (10) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{\log(1+y)}{y} - \frac{\log(1-y)}{y} \right) dy$$
$$= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{2y} \log \left(\frac{1+y}{1-y} \right) dy.$$

Ahora, el cambio de variables $u = \frac{1+y}{1-y}$ (de donde $y = \frac{u-1}{u+1}$ y $dy = \frac{2\,du}{(u+1)^2}$) nos da

$$\int_0^1 \frac{1}{2y} \log \left(\frac{1+y}{1-y} \right) dy = \int_1^{\infty} \frac{\log u\, du}{u^2-1}.$$

Conviene observar que, con el cambio de variables $w = 1/u$,

$$\int_1^{\infty} \frac{\log u\, du}{u^2-1} = \int_0^1 \frac{\log w\, dw}{w^2-1}. \qquad (11)$$

Para calcular estas últimas integrales, evaluamos $\displaystyle\int \frac{\log z}{z^2-1} dz$ sobre un camino circular, que evita el polo en 1 y la singularidad en 0, como el que se ilustra en la figura.

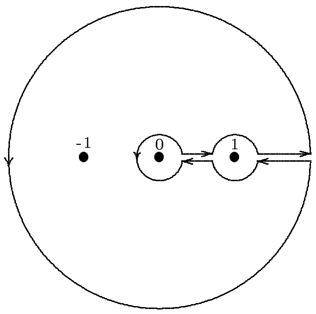

Figura 1

Los límites de las integrales sobre los trechos circulares próximos a cero y a infinito son nulos, de modo que, si R es el residuo en -1, tenemos que

$$\begin{aligned}
2\pi i R = & \int_0^1 \frac{\log y}{y^2-1}dy + \int_1^\infty \frac{\log y}{y^2-1}dy \\
& - \lim_{\rho\to 0}\left[\int_\rho^{1-\rho} \frac{\log y + 2\pi i}{y^2-1}dy + \int_{1+\rho}^\infty \frac{\log y + 2\pi i}{y^2-1}dy\right] \\
& - \lim_{\rho\to 0}\left[\int_0^\pi \frac{\log|1+\rho e^{it}|}{\rho e^{it}(2+\rho e^{it})} i\rho e^{it}dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{(\log|1+\rho e^{it}| + 2\pi i)}{\rho e^{it}(2+\rho e^{it})} i\rho e^{it}dt\right].
\end{aligned}$$

Las integrales que nos interesa calcular se cancelan, y lo que queda es que

$$2\pi i R = -2\pi i \lim_{\rho\to 0}\left[\int_\rho^{1-\rho} \frac{dy}{y^2-1} + \int_{1+\rho}^\infty \frac{dy}{y^2-1}\right] - \pi i \frac{2\pi i}{2},$$

y como el residuo vale $-i\pi/2$, como resulta del desarrollo

$$\frac{\log(-1+z)}{(-1+z)^2-1} = \frac{i\pi - z - z^2/2 - \dots}{-2z+z^2},$$

lo único que se deduce es que el límite dentro del corchete vale cero.

Los cálculos anteriores, aunque en apariencia inútiles, sugieren que un cálculo análogo realizado con $\dfrac{\log^2 y}{y^2-1}$ como integrando conducirá a que se eliminen las integrales que contienen el logaritmo al cuadrado, pero no las que contienen al logaritmo. Hacemos esta operación, reemplazando el nuevo residuo por su valor $(i\pi)^2/(-2)$:

$$\begin{aligned}
2\pi i\frac{\pi^2}{2} &= \int_0^1 \frac{\log^2 y}{y^2-1}dy + \int_1^\infty \frac{\log^2 y}{y^2-1}dy \\
&- \lim_{\rho\to 0}\left[\int_\rho^{1-\rho} \frac{(\log y + 2\pi i)^2}{y^2-1}dy + \int_{1+\rho}^\infty \frac{(\log y + 2\pi i)^2}{y^2-1}dy\right] \\
&- \lim_{\rho\to 0}\left[\int_0^\pi \frac{(\log^2|1+\rho e^{it}|)}{\rho e^{it}(2+\rho e^{it})}i\rho e^{it}dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{(\log|1+\rho e^{it}| + 2\pi i)^2}{\rho e^{it}(2+\rho e^{it})}i\rho e^{it}dt\right].
\end{aligned}$$

Al desarrollar los cuadrados en la segunda línea de la ecuación anterior, los cuadrados de los logaritmos producen integrales que se cancelan con las de la primera línea. Los cuadrados de los segundos términos proporcionan integrales cuya suma tiende a cero, por el resultado obtenido en el cálculo precedente. Sólo quedan los dobles productos:

$$\pi^3 i = -4\pi i\int_0^\infty \frac{\log y}{y^2-1}dy - i\pi\frac{4\pi^2 i^2}{2}$$

o bien

$$-\pi^3 i = -8\pi i\int_1^\infty \frac{\log y}{y^2-1}dy,$$

ya que, por (11), la integral en $(0,\infty)$ es el doble de la integral en $(1,\infty)$.

Concluimos entonces que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{1-x^2y^2} = \frac{4}{3}\int_1^\infty \frac{\log y}{y^2-1}dy = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

* * *

Queda abierto resolver el problema de hallar un método para evaluar $\zeta(2k+1)$ que sólo emplee herramientas matemáticas juveniles. Todos los métodos exhibidos aquí para el caso par no parecen poder imitarse para resolver el caso impar. Sin embargo, observe que para la obtención de (9) el exponente $2k$ no jugó un papel relevante y, por lo tanto, un razonamiento similar con $2k+1$ en lugar de $2k$ resulta en la siguiente ecuación:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2k+1}} = \left(\frac{2^{2k+1}}{2^{2k+1}-1}\right)\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{2k+1} \frac{1}{(1-x_1^2\cdots x_{2k}^2 x_{2k+1}^2)}\,dx_1\cdots dx_{2k}\,dx_{2k+1}$$

El problema es que la integral múltiple de longitud impar parece no poder calcularse, aún con técnicas de variable compleja. Esto último no es un teorema sino un reflejo de mi incapacidad para resolver este problema. Como consuelo tengo las siguientes palabras de Enrique Cabaña: “En general las cosas que se calculan por variable compleja, son inexplicables, una especie de casualidad de la naturaleza. Yo creo que lo normal es que [la integral múltiple] no se pueda hacer, y lo maravilloso es que se pueda para dos”.

Agradecimientos. Gracias a: Stefania Marcantognini por exhibir la fórmula de Euler en su puerta; Alfredo Octavio por proveer la fórmula de las integrales múltiples; Enrique Cabaña por ayudar con los cálculos de variable compleja; Tom Berry por indicarme la existencia del libro de G. Chrystal en nuestra biblioteca; Alejandra Cabaña por comentarios y correcciones.