Anzeige: Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Bernhard Riemann

[Göttinger Nachrichten, 1859, Nr. 19.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Anzeige: Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Bernhard Riemann

[Göttinger Nachrichten, 1859, Nr. 19.]

Diese Untersuchung macht nicht darauf Anspruch, der experimentellen Forschung nützliche Ergebnisse zu liefern; der Verfasser wünscht sie nur als einen Beitrag zur Theorie der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen betrachtet zu sehen. Wie für die Integration der linearen partiellen Differentialgleichungen die fruchtbarsten Methoden nicht durch Entwicklung des allgemeinen Begriffs dieser Aufgabe gefunden worden, sondern vielmehr aus der Behandlung specieller physikalischer Probleme hervorgegangen sind, so scheint auch die Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen durch eine eingehende, alle Nebenbedingungen berücksichtigende, Behandlung specieller physikalischer Probleme am meisten gefördert zu werden, und in der That hat die Lösung der ganz speciellen Aufgabe, welche den Gegenstand dieser Abhandlung bildet, neue Methoden und Auffassungen erfordert, und zu Ergebnissen geführt, welche wahrscheinlich auch bei allgemeineren Aufgaben eine Rolle spielen werden.

Durch die vollständige Lösung dieser Aufgabe dürften die vor einiger Zeit zwischen den englischen Mathematikern *Challis*, *Airy* und *Stokes* lebhaft verhandelten Fragen[1], soweit dies nicht schon durch *Stokes*[2] geschehen ist, zu klarer Entscheidung gebracht worden sein, so wie auch der Streit, welche über eine andere denselben Gegenstand betreffende Frage in der K. K. Ges. d. W. zu Wien zwischen den Herrn *Petzval*, *Doppler* und *A. von Ettinghausen*[3] geführt wurde.

Das einzige empirische Gesetz, welches ausser den allgemeinen Bewegungsgesetzen bei dieser Untersuchung vorausgesetzt werden musste, ist das Gesetz, nach welchem der Druck eines Gases sich mit der Dichtigkeit ändert, wenn es keine Wärme aufnimmt oder abgiebt. Die schon von *Poisson* ge-

[1]Phil. mag. voll. 33. 34. und 35.
[2]Phil. mag. vol. 33, p. 349.
[3]Sitzungsberichte der K. K. Ges. d. W. vom 15. Jan., 21. May und 1. Juni 1852.

machte, aber damals auf sehr unsicherer Grundlage ruhende Annahme, dass der Druck bei der Dichtigkeit ϱ proportional ϱ^k sich ändere, wenn k das Verhältniss der specifischen Wärme bei constanten Druck zu der bei constantem Volumen bedeutet, kann jetzt durch die Versuche von *Regnault* über die specifischen Wärmen der Gase und ein Princip der mechanischen Wärmetheorie begründet werden, und es schien nöthig diese Begründung des *Poisson*'schen Gesetzes, da sie noch wenig bekannt zu sein scheint, in der Einleitung vorauszuschicken. Der Werth von k findet sich dabei $= 1,4101$, während die Schallgeschwindigkeit bei $0°C.$ und trockner Luft nach den Versuchen von *Martins* und *A. Bravais*[4] $= \dfrac{332^{\mathrm{m}}, 37}{1''}$ sich ergeben und für k den Werth 1,4095 liefern würde.

Obwohl die Vergleichung der Resultate unserer Untersuchung mit der Erfahrung durch Versuche und Beobachtungen grosse Schwierigkeiten hat und gegenwärtig kaum ausführbar sein wird, so mögen diese doch, soweit es ohne Weitläufigkeit möglich ist, hier mitgetheilt werden.

Die Abhandlung behandelt die Bewegung der Luft oder eines Gases nur für den Fall, wenn anfangs und also auch in der Folge die Bewegung allenthalben gleich gerichtet ist, und in jeder auf ihrer Richtung senkrechten Ebene Geschwindigkeit und Dichtigkeit constant sind. Für den Fall, wo die anfängliche Gleichgewichtsstörung auf eine endlich Strecke beschränkt ist, ergiebt sich bekanntlich bei der gewöhnlichen Voraussetzung, dass die Druckverschiedenheiten unendlich kleine Bruchtheile des ganzen Drucks sind, das Resultat, dass von der erschütterten Stelle zwei Wellen, in deren jeder die Geschwindigkeit eine bestimmte Function der Dichtigkeit ist, ausgehen und in entgegengesetzten Richtungen mit der bei dieser Voraussetzung constanten Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ fortschreiten, wenn $\varphi(\varrho)$ den Druck bei der Dichtigkeit ϱ und $\varphi'(\varrho)$ die Derivirte dieser Function bezeichnet. Etwas ganz ähnliches gilt nun für diesen Fall auch, wenn die Druckverschiedenheiten endlich sind. Die Stelle, wo das Gleichgewicht gestört ist, zelegt sich ebenfalls nach Verlauf einer endlichen Zeit in zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen. In diesen ist die Geschwindigkeit, in der Fortpflanzungsrichtung gemessen, eine bestimmte Function $\int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d\log\varrho$ der Dichtigkeit, wobei die Integrationsconstante in beiden verschieden sein kann; in jeder ist also mit einem und demselben Werthe der Dichtigkeit stets derselbe Werth der Geschwindigkeit verbunden, und zwar mit einem grösseren Werthe ein algebraisch grösserer Werth der Geschwindigkeit. Beide Werthe rücken mit constanter Geschwindigkeit fort. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Gase ist $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$, im Raume aber um die in der Fortpflanzungsrichtung gemessene

[4] Ann. de chim. et de phys. Ser. III, T. XIII, p. 5.

Geschwindigkeit des Gases grösser. Unter der in der Wirklichkeit zutreffenden Voraussetzung, dass $\varphi'(\varrho)$ bei wachsendem ϱ nicht abnimmt, rücken daher grössere Dichtigkeiten mit grösserer Geschwindigkeit fort, und hieraus folgt, dass die Verdünnungswellen, d. h. die Theile der Welle, in denen die Dichtigkeit in der Fortpflanzungsrichtung wächst, der Zeit proportional an Breite zunehmen, die Verdichtungswellen aber ebenso an Breite abnehmen, und schliesslich in Verdichtungsstösse übergehen müssen. Die Gesetze, welche vor der Scheidung beider Wellen oder bei einer über den ganzen Raum sich erstreckenden Gleichgewichtsstörung gelten, so wie die Gesetze für das Fortschreiten von Verdichtungsstössen, können hier, weil dazu grössere Formeln erforderlich wären, nicht angegeben werden.

In akustischer Beziehung liefert demnach diese Untersuchung das Resultat, dass in den Fällen, wo die Druckverschiedenheiten nicht als unendlich klein betrachtet werden können, eine Aenderung der Form der Schallwellen, also des Klanges, während der Fortpflanzung eintritt. Eine Prüfung dieses Resultats durch Versuche scheint aber trotz der Fortschritte, welche in der Analyse des Klanges in neuester Zeit durch *Helmholtz* u. A. gemacht worden sind, sehr schwer zu sein; denn in geringeren Entfernungen ist eine Aenderung des Klanges nicht merklich, und bei grösseren Entfernungen wird es schwer sein, die mannigfachen Ursachen, welche den Klang modificiren können, zu sondern. An eine Anwendung auf die Meteorologie ist wohl nicht zu denken, da die hier untersuchten Bewegungen der Luft solche Bewegungen sind, die sich mit der Schallgeschwindigkeit fortpflanzen, die Strömungen in der Atmosphäre aber allem Anschein nach mit viel geringerer Geschwindigkeit fortschreiten.