Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist.

Bernhard Riemann

(Auszug aus einem Schreiben ***Riemann***'s an Herrn ***Weierstrass***)

[Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 71. (1870), S. 197–200.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist.

Bernhard Riemann

(Auszug aus einem Schreiben *Riemann*'s an Herrn *Weierstrass*)

[Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 71. (1870), S. 197–200.]

... Den Beweis des Satzes, auf welchen Sie neulich die Unterhaltung lenkten, dass eine einwerthige mehr als $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist, habe ich im Gespräch wohl nicht ganz klar ausgedrückt, auch nur die Grundgedanken angegeben; ich theile ihn Ihnen daher hier noch einmal mit.

Es sei f eine $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

und—ich darf wohl meine Ihnen bekannten Benennungen gebrauchen—der Periodicitätmodul von x_ν für die μ te Periode a_μ^ν. Es lassen sich dann bekanntlich die Grössen x in die Form

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a_\mu^\nu \xi_\mu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

setzen[1], so dass die Grössen ξ reell sind. Lässt man nun die Grössen ξ die Werthe von 0 bis 1 mit Ausschluss eines von diesen Grenzwerthen durchlaufen, so hat das dadurch entstehende $2n$ fach ausgedehnte Grössengebiet die Eigenschaft, dass jedes System von Werthen der n Veränderlichen einem und nur einem Werthsysteme innerhalb dieses Grössengebiets nach den $2n$

[1]Dies ist nicht immer der Fall, sondern nur, wenn die $2n$ Gleichungen, durch welche die Grössen ξ bestimmt werden, von einander unabhängig sind; die Ausnahmen sind aber leicht zu behandeln.

Modulsystemen congruent ist. Ich werde, um mich später kürzer ausdrücken zu können, dieses Gebiet „dass bei diesen $2n$ Modulsystemen periodisch sich wiederholende Grössengebiet“ nennen.

Hat die Function nun noch ein $2n+1^{\text{tes}}$ Modulsystem, welches sich nicht aus den $2n$ ersten Modulsystemen zusammensetzen lässt, so kann man die einem Grössensysteme nach diesem Modulsysteme congruenten Grössensysteme auf innerhalb dieses Gebiets liegende nach den $2n$ ersten Modulsystemen ihnen congruente zurückführen und dadurch offenbar beliebig viele innerhalb dieses Gebiets liegende und nach den $2n+1$ Modulsystemen einander congruente Grössensysteme erhalten, wenn nicht zwei von den nach dem $(2n+1)$ ten Modulsysteme congruente Grössensysteme auch nach den $2n$ ersten Modulsystemen congruent sind. In diesem Falle würden zwischen den $2n+1$ Modulsystemen n Gleichungen von der Form

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0,$$

worin die Grössen m ganze Zahlen wären, stattfinden, und folglich, wie ich später zeigen werde, die $2n+1$ Modulsysteme sich aus $2n$ Modulsystemen zusammensetzen lassen.

Man theile nun für jede der Grössen ξ die Strecke von 0 bis 1 in q gleiche Theile, wodurch das bei den $2n$ ersten Modulsystemen periodisch wiederkehrende Gebiet in q^{2n} Gebiete zerfällt, in deren jedem sich die Grössen ξ nur um $\frac{1}{q}$ ändern. Offenbar müssen dann von mehr als q^{2n} nach den $2n+1$ Modulsystemen einander congruenten und in jenem Gebiete liegenden Grössensystemen nothwendig zwei in dasselbe Theilgebiet fallen, so dass sich die Werthe derselben Grösse ξ in beiden keinenfalls um mehr als $\frac{1}{q}$ von einander unterscheiden. Die Function bleibt also dann ungeändert, während keine der Grössen ξ um mehr als $\frac{1}{q}$ geändert wird, und ist folglich, da q beliebig gross genommen werden kann, wenn sie stetig ist, eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Grössen x.

Es ist nun noch zu zeigen, dass sich $2n+1$ Modulsysteme, zwischen denen die n Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0$$

stattfinden, aus $2n$ Modulsystemen zusammensetzen lassen.

Man kann zunächst leicht beweisen, dass sich zu einem Modulsysteme

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a_\mu^\nu m_\mu = b_1^\nu,$$

worin die Grössen m ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, immer $2n-1$ andere Modulsysteme $b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ so finden lassen, dass Congruenz nach den Modulsystemen a mit Congruenz nach den Modulsystemen b identisch ist. Es seien θ_1 der grösste gemeinschaftliche Theiler von m_1 und m_2 und α, β zwei der Gleichung

$$\beta m_1 - \alpha m_2 = \theta_1$$

genügende ganze Zahlen. Setzt man dann

$$a_1^\nu m_1 + a_2^\nu m_2 = c_1^\nu \theta_1$$

und

$$\alpha a_1^\nu + \beta a_2^\nu = b_{2n}^\nu,$$

so hat man

$$a_1^\nu = \beta c_1^\nu - \frac{m_2}{\theta_1} b_{2n}^\nu, \quad a_2^\nu = -\alpha c_1^\nu + \frac{m_1}{\theta_1} b_{2n}^\nu.$$

Es lassen sich also auch umgekehrt die Modulsysteme a_1 und a_2 aus den Modulsystemen b_{2n} und c_1 zusammensetzen, und folglich ist Congruenz nach jenen mit Congruenz nach diesen gleichbedeutend. Man kann daher die Modulsysteme a_1 und a_2 durch die Modulsysteme c_1 und b_{2n} ersetzen. Auf dieselbe Weise kann man nun, wenn θ_2 der grösste gemeinschaftliche Theiler von θ_1 und m_2 ist, die Modulsysteme c_1 und a_3 durch das Modulsystem

$$\frac{1}{\theta_2}(\theta_1 c_1^\nu + m_3 a_3^\nu) = c_2^\nu$$

und durch ein Modulsystem b_{2n-1} ersetzen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man offenbar den zu beweisenden Satz. Der Inhalt des periodisch sich wiederholenden Gebiets ist für die neuen Modulsysteme b derselbe wie für die alten.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich in den n Gleichungen

$$\sum_1^{2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0$$

die $2n$ ersten Modulsysteme so durch $2n$ neue $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ ersetzen, dass diese Gleichungen die Form

$$p b_1^\nu - q a_{2n+1}^\nu = 0$$

annehmen, worin p und q ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Sind nun γ, δ zwei der Gleichung

$$p\delta + q\gamma = 1$$

genügende ganze Zahlen, so lassen sich offenbar die beiden Modulsysteme b_1 und a_{2n+1} durch das eine Modulsystem

$$\gamma b_1^\nu + \delta a_{2n+1}^\nu = \frac{a_{2n+1}^\nu}{p} = \frac{b_1^\nu}{q}$$

ersetzen. Sämmtliche Modulsysteme, welche sich aus den Modulsystemen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ zusammensetzen lassen, können also auch aus den $2n$ Modulsystemen

$$\frac{b_1}{q}, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$$

zusammengesetzt werden, und umgekehrt. Der Inhalt des periodische wiederkehrenden Gebiets beträgt für diese $2n$ Modulsysteme nur $\frac{1}{q}$ von dem für die $2n$ ersten Modulsysteme a. Hat die Function nun ausser diesen Modulsystemen noch ein durch ähnliche ganzzahlige Gleichungen mit ihnen verbundenes, so lassen sich wieder $2n$ neue Modulsysteme finden, aus welchen sich alle diese Modulsysteme zusammensetzen lassen, und der Inhalt des periodisch sich wiederholenden Gebiets wird dabei wieder auf einen aliquoten Theil reducirt. Wenn dieses Gebiet unendlich klein wird, so wird die Function eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Veränderlichen und zwar von $n-1$ oder $n-2$ oder $n-m$, jenachdem nur eine, oder zwei oder m Dimensionen dieses Grössengebiets unendlich klein werden. Soll dies aber nicht eintreten, so muss die Operation schliesslich abbrechen, und man wird also zu $2n$ Modulsystemen gelangen, aus welchen sich sämmtliche Modulsysteme der Function zusammensetzen lassen.

Göttingen, den 26. October 1859.